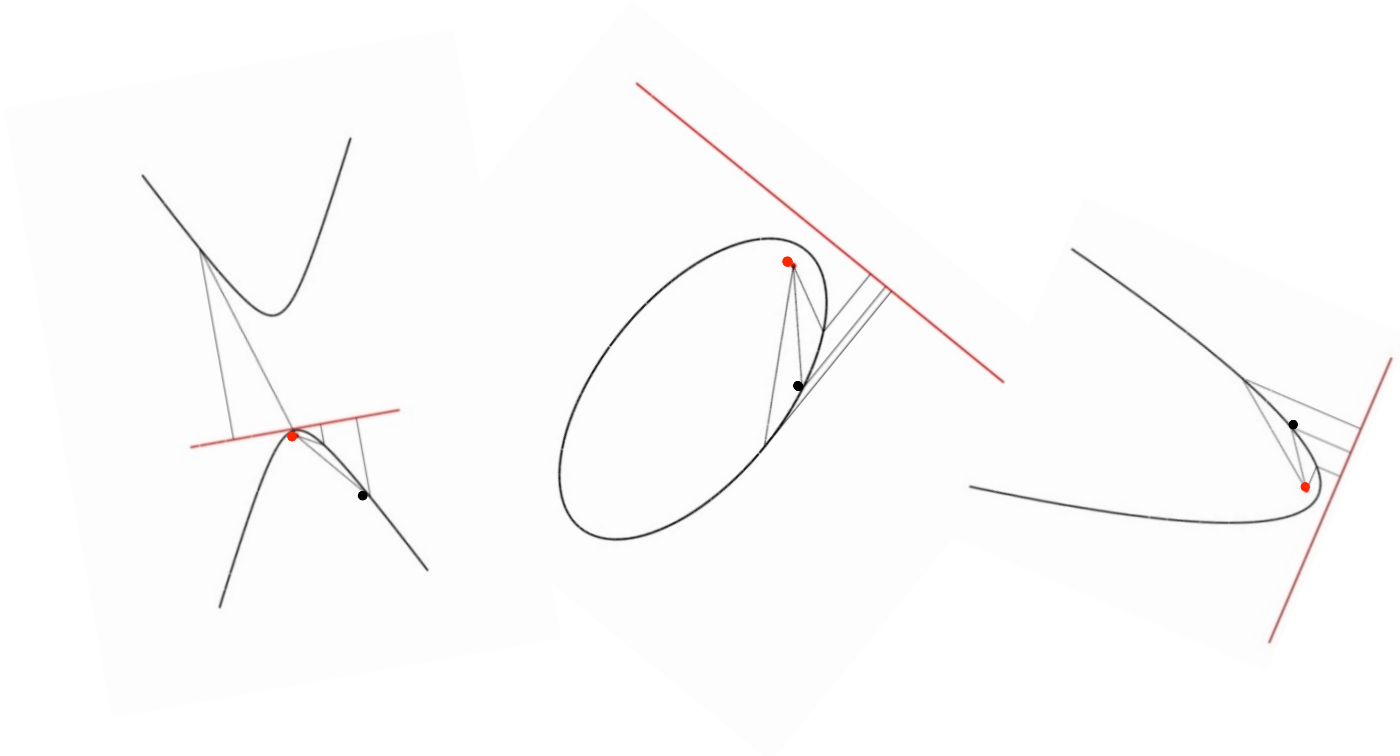
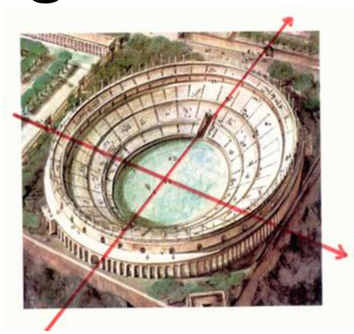
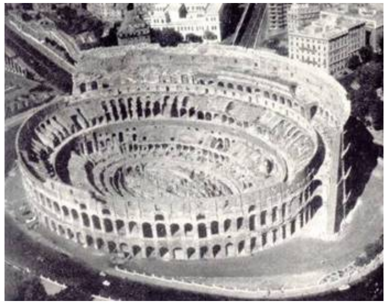
Le Coniche dalle origini ai giorni nostri

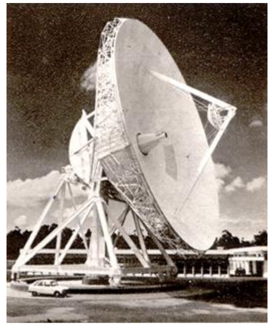
Prof. Ivano Coccorullo



Generalità

Menecmo, Archita da Taranto, Aristeo il vecchio,Euclide sono i primi grandi precursori degli studi sulle coniche.

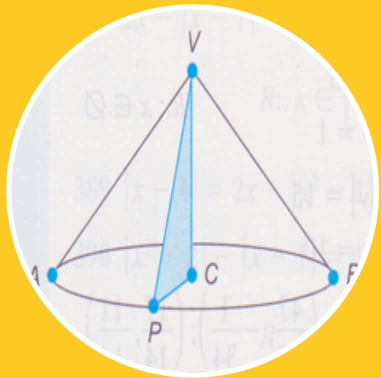





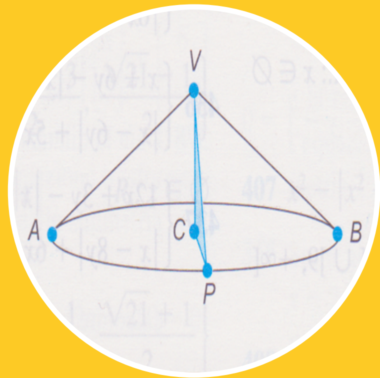
Le coniche furono scoperte nel tentativo di risolvere i tre famosi problemi:

- Trisezione dell'angolo
- Duplicazione del cubo
- Quadratura del cerchio

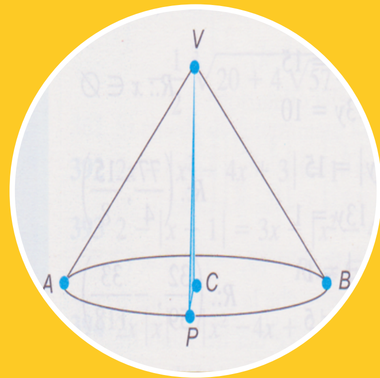
Menecmo



Quando un triangolo rettangolo ruota intorno ad un cateto fissato fino a ritornare alla sua posizione iniziale, la figura così racchiusa è un CONO



Triangolo rettangolo isoscele	Cono retto
Rotazione intorno al cateto minore	Cono ottusangolo
Rotazione intorno al cateto maggiore	Cono acutangolo

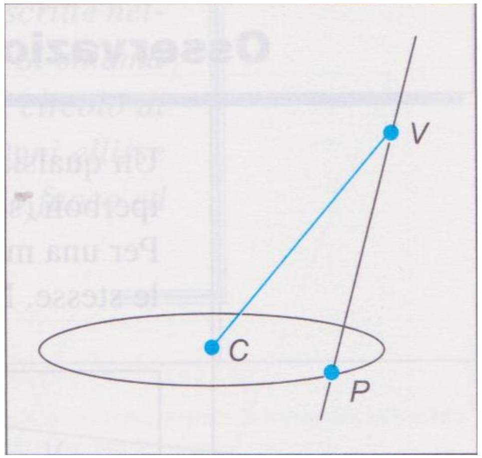


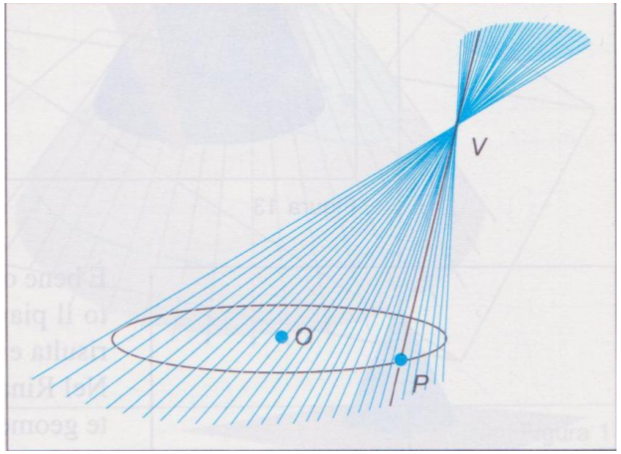
Oxitome

Ortotome

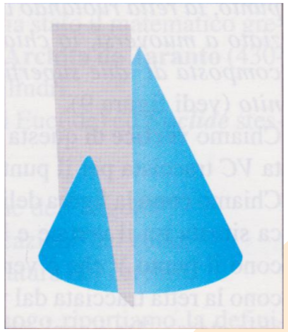
Amblitome

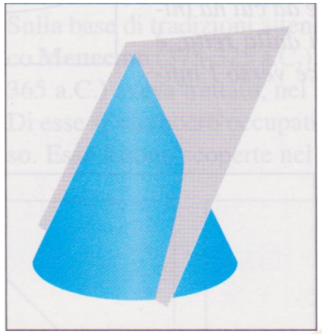
Se da un certo punto V si traccia alla circonferenza di un cerchio non situato nello stesso piano del punto una retta prolungata da una parte e dall'altra e se, restando fisso il punto, la retta riprende la posizione da cui ha iniziato a muoversi, io chiamo superficie conica quella che, descritta dalla retta, è composta di due superfici opposte nel vertice, dove ciascuna cresce verso l'infinito

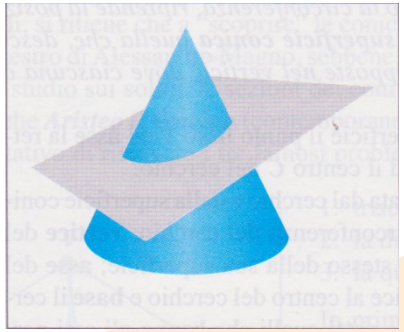




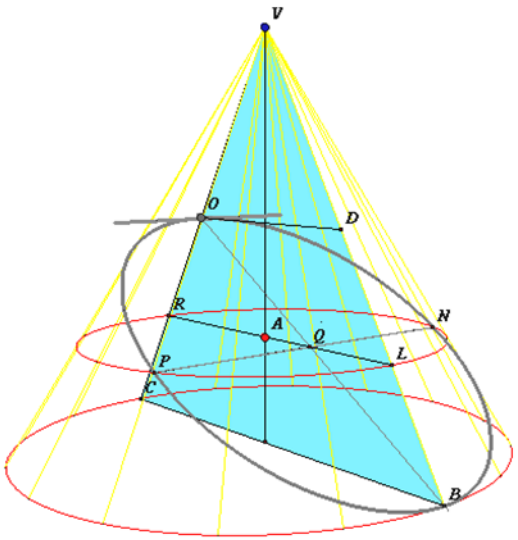
Intersechiamo il cono con un piano





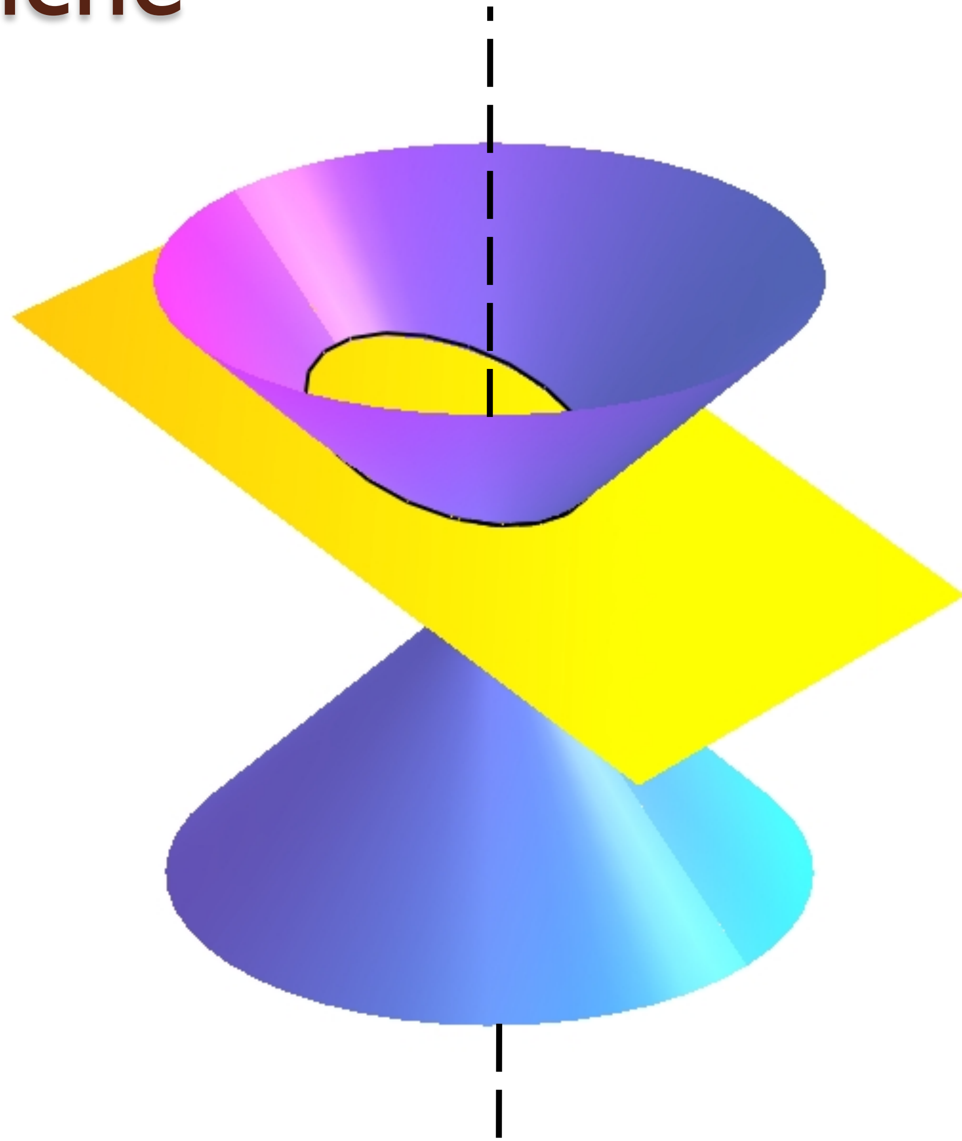


- Ellisse
- Iperbole
- parabola



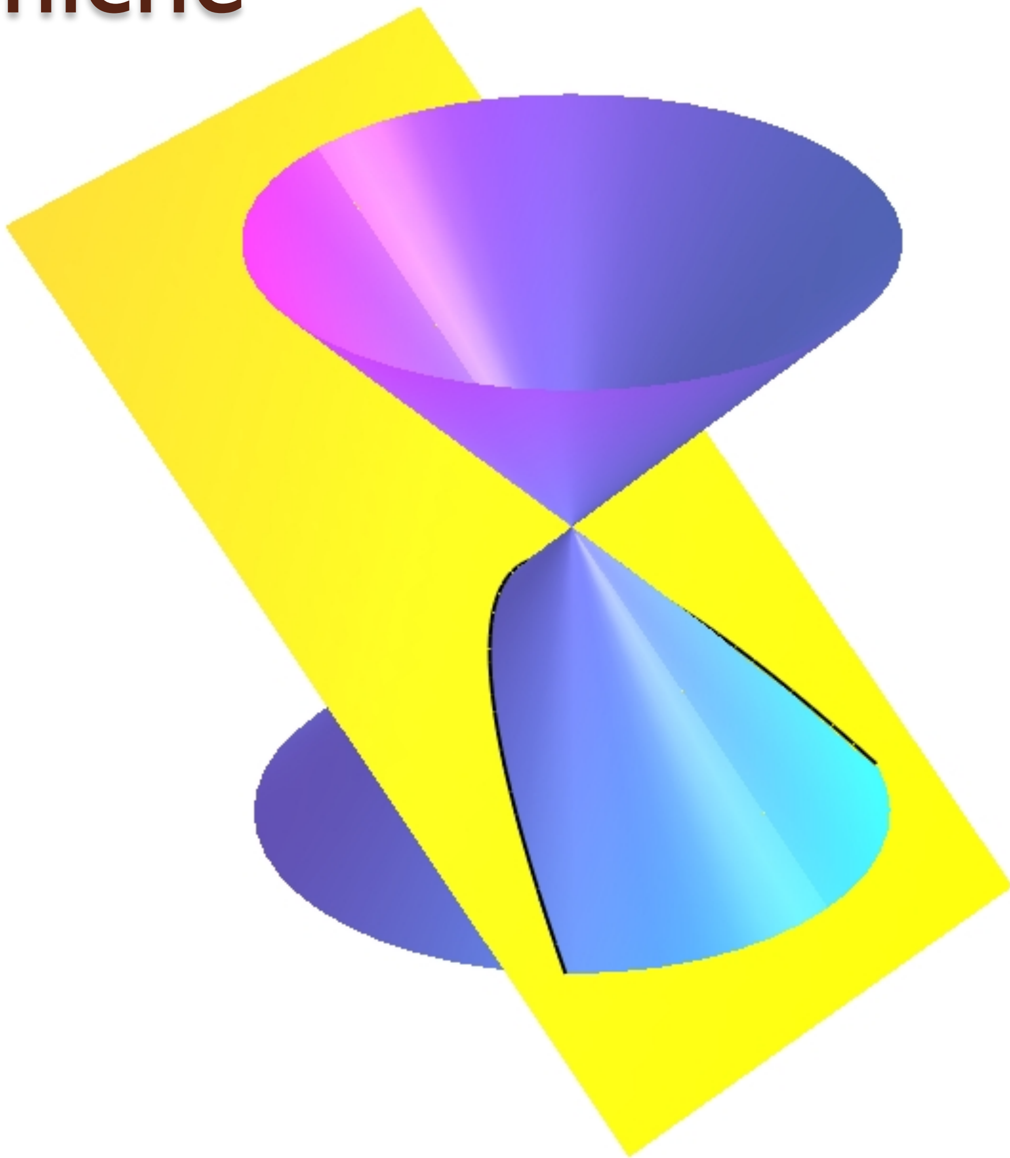
Sezioni Coniche

- Ellisse



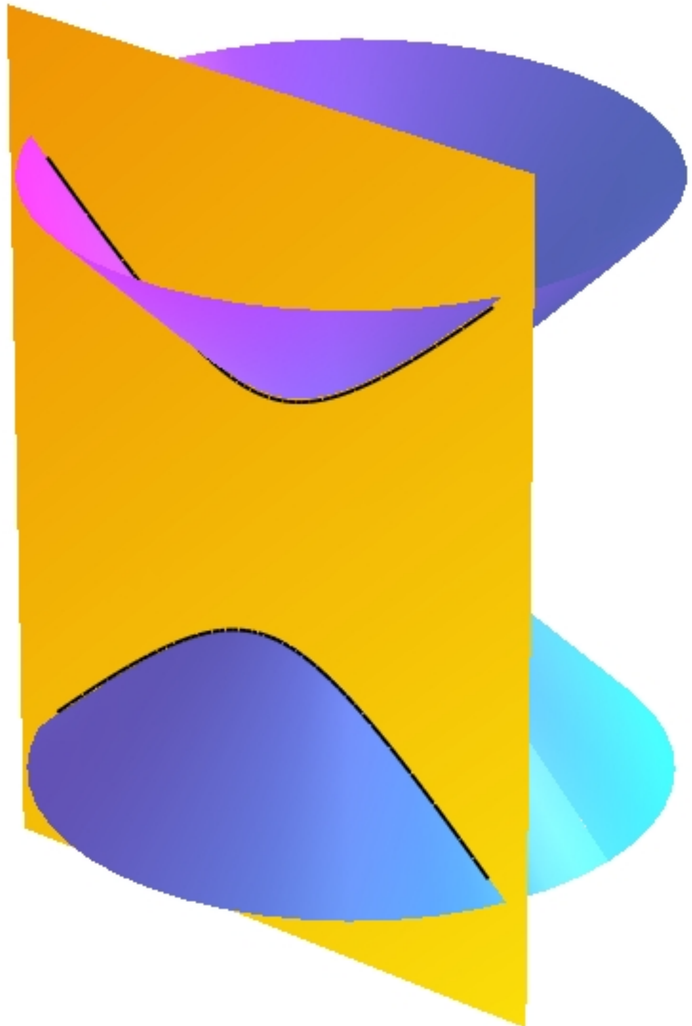
Sezioni Coniche

- Parabola



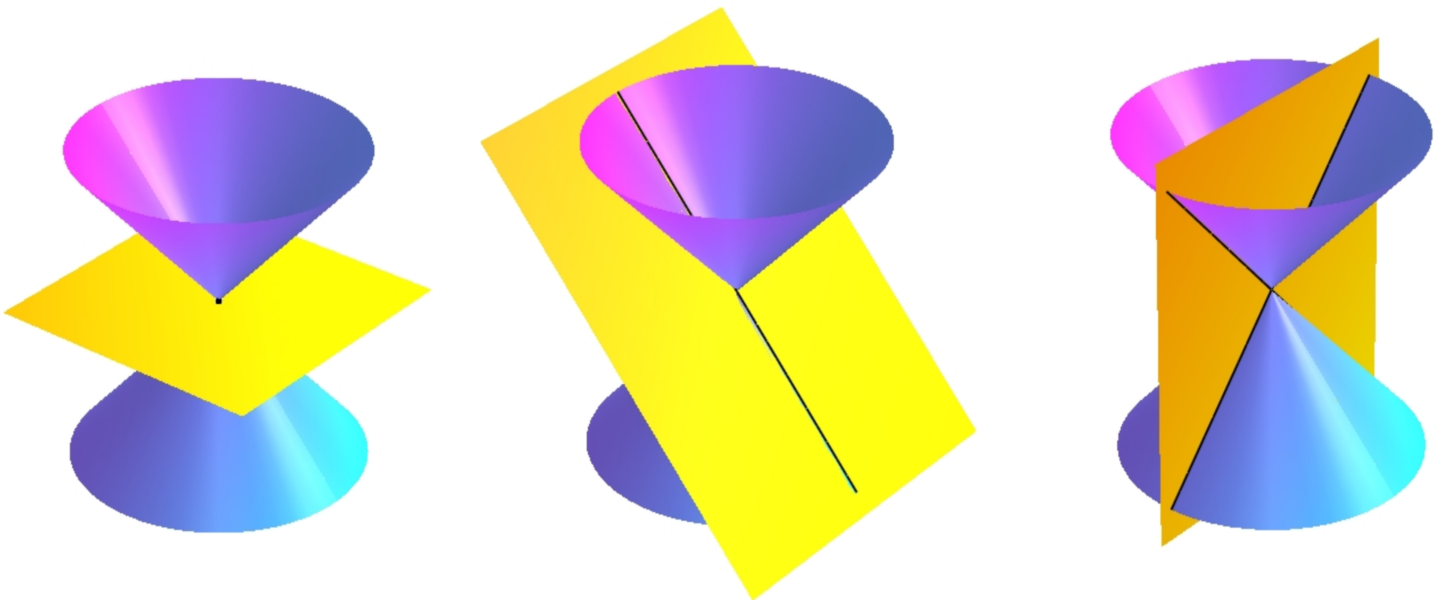
Sezioni Coniche

Iperbole



Sezioni Coniche

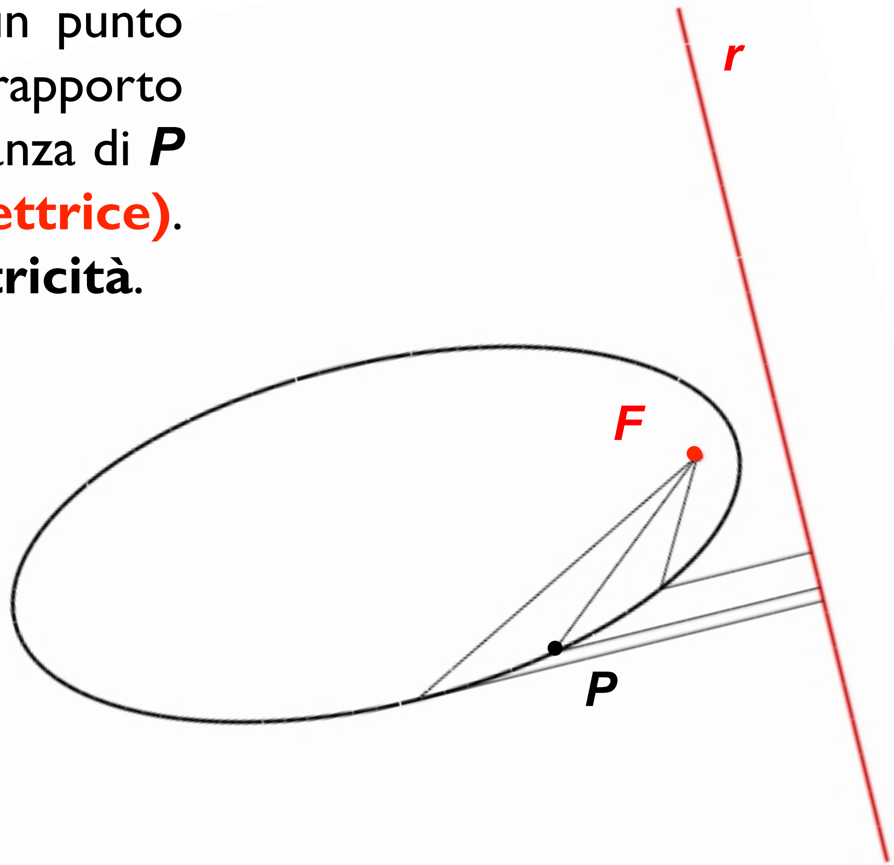
- Coniche degeneri



Coniche come Luoghi di Punti

- Ellisse

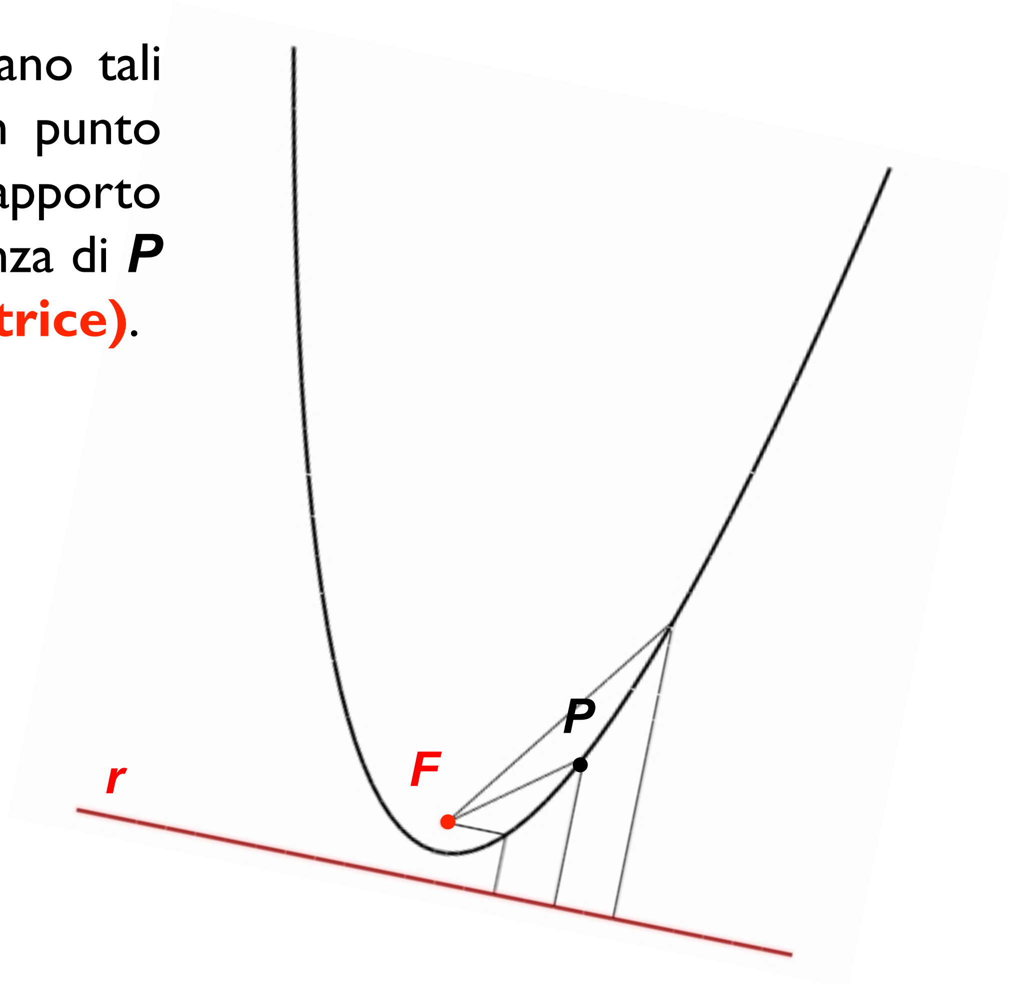
È il luogo dei punti ***P*** del piano tali che la distanza di ***P*** da un punto fissato ***F* (fuoco)** è in rapporto costante **e** < **1** con la distanza di ***P*** da una retta fissata ***r* (direttrice)**. Tale rapporto **e** è l'**eccentricità**.



Coniche come Luoghi di Punti

- Parabola

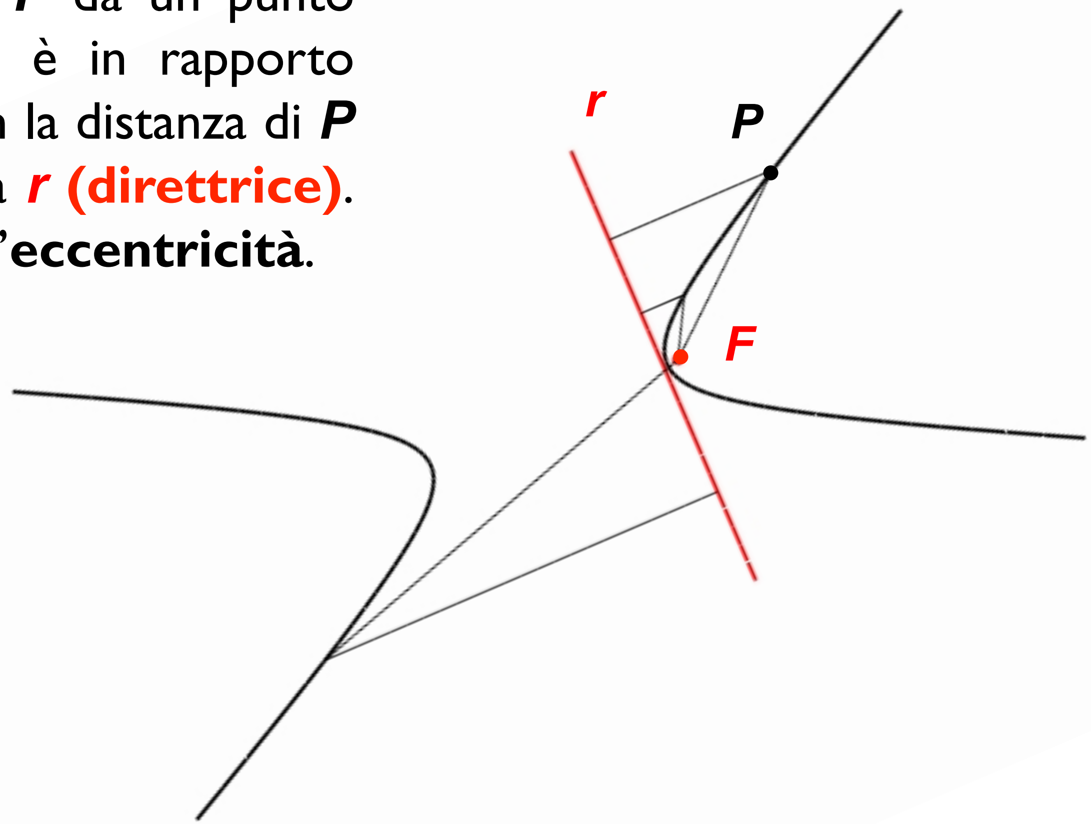
È il luogo dei punti ***P*** del piano tali che la distanza di ***P*** da un punto fissato ***F* (fuoco)** è in rapporto costante ***e* = 1** con la distanza di ***P*** da una retta fissata ***r* (direttrice)**.



Coniche come Luoghi di Punti

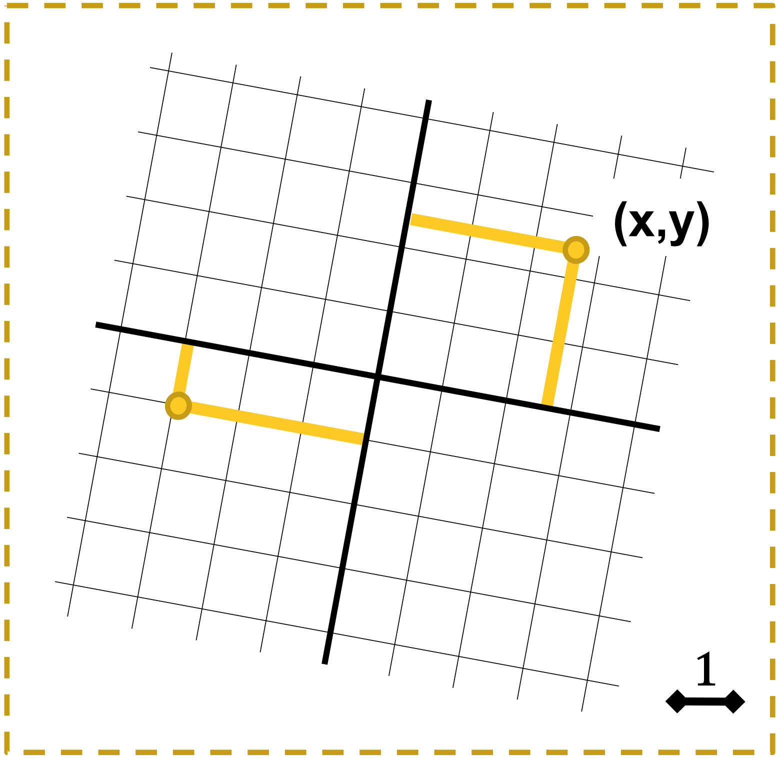
- Iperbole

È il luogo dei punti ***P*** del piano tali che la distanza di ***P*** da un punto fissato ***F* (fuoco)** è in rapporto costante **e** > **1** con la distanza di ***P*** da una retta fissata ***r* (direttrice)**. Tale rapporto **e** è l'**eccentricità**.



Coordinate Cartesiane

Un punto nel piano può essere individuato mediante una coppia di numeri: le “distanze” da due rette ortogonali (**in una fissata unità di misura**).



Punti del Piano	⟺	**Coppie di Numeri (x,y)**
Figure nel Piano	⟺	**Relazioni tra Numeri**
Geometria	⟺	**Algebra**

Coniche e Algebra

- **Teorema.**

Una conica nel piano cartesiano consiste dei punti le cui coordinate **(x,y)** risolvono un'opportuna equazione di secondo grado:

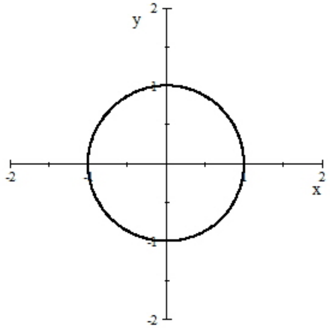
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Viceversa, "quasi sempre", le soluzioni **(x,y)** di un'equazione di secondo grado in due incognite sono le coordinate dei punti di una conica.

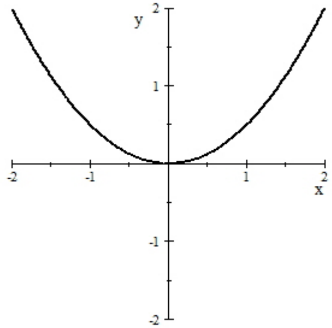
Coniche e Algebra

- Esempi notevoli: caso non degenere

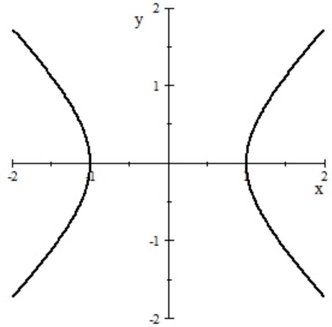
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$



$$x^2 - 2y = 0$$



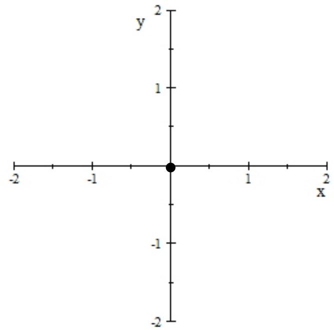
$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$



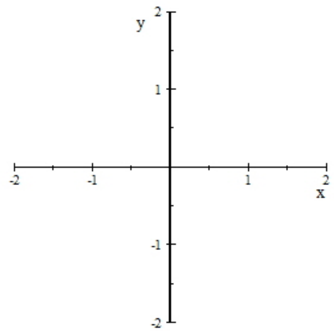
Coniche e Algebra

- Esempi notevoli: caso degenere

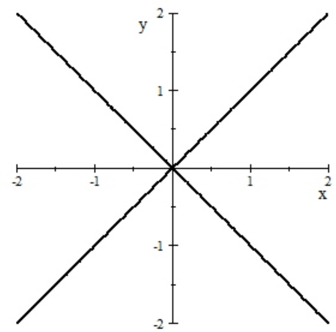
$$x^2 + y^2 = 0$$



$$x^2 = 0$$



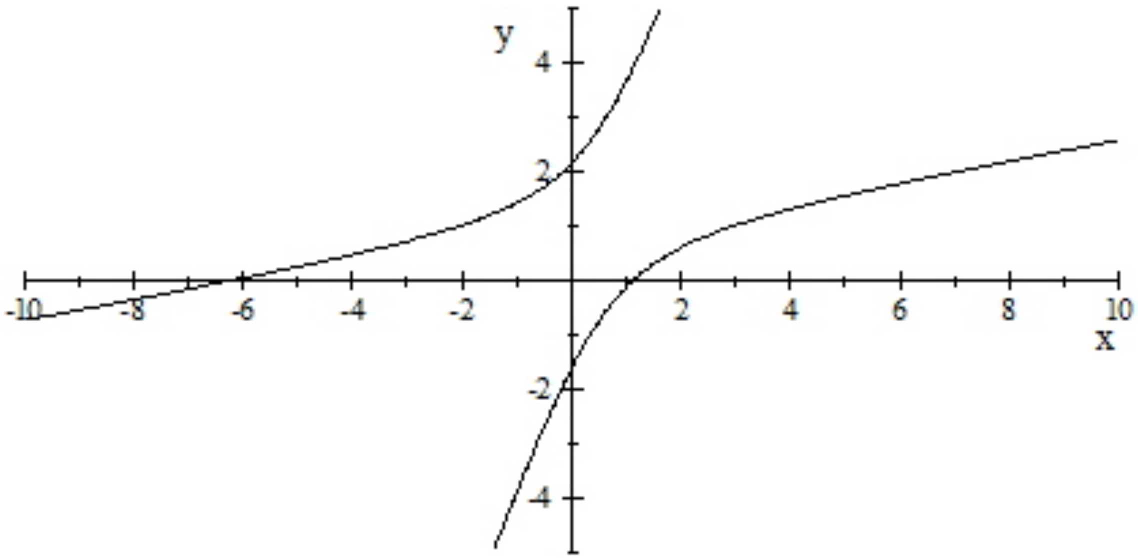
$$x^2 - y^2 = 0$$



Riconoscere una Conica

- Che **tipo** di conica è quella descritta da

$$x^2 - 6xy + 2y^2 + 5x - y - 7 = 0 \ ??$$



Coniche e Matrici

- Alla conica

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

si associano le matrici

$$\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Richiami sulle Matrici

- Determinante e Traccia 2×2

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \boxed{a_{11}a_{22}} - \boxed{a_{12}a_{21}}$$

$$\mathrm{tr} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22}$$

Richiami sulle Matrici

- Determinante 3×3

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} \\ &+ a_{21}a_{32}a_{13} \\ &+ a_{12}a_{23}a_{31} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} \\ &- a_{23}a_{32}a_{31} \\ &- a_{12}a_{21}a_{13} \end{aligned}$$

Richiami sulle Matrici

- Determinante 3×3: Esempio

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \\ &+ 0 \\ &+ 0 \\ &- (-4) \\ &- 0 \\ &- 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Invarianti di un'Equazione…

…di secondo grado in 2 incognite:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \qquad \mathbf{I}_2 = \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_3 = \det\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

Invarianti e Coniche

- **Teorema:**

Le proprietà geometriche della conica

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Sono completamente descritte dai tre invarianti

$$I_1 \qquad I_2 \qquad I_3$$

Identificare la Conica…

… $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

mediante gli invarianti. Caso non degenere: $I_3 \neq 0$

- $I_2 > 0$ e $I_1 I_3 < 0$ ⟶ **Ellisse**
- $I_2 = 0$ ⟶ **Parabola**
- $I_2 < 0$ ⟶ **Iperbole**

Identificare la Conica…

$$\dots\ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

mediante gli invarianti. Caso degenere: $I_3 = 0$

- $I_2 > 0$ → 1 **Punto**
- $I_2 = 0$ → 2 **Rette Parallele**
- $I_2 < 0$ → 2 **Rette Incidenti**

Identificare la Conica…

$$\ldots\ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

mediante gli invarianti. Caso eccezionale

$$I_3 \neq 0,\ \ I_2 > 0 \ \text{ e } \ I_1 I_3 > 0$$

$$\Downarrow$$

Ellisse Immaginaria

Identifichiamo la Conica…

$$\ldots\ 2x^2 + xy + y^2 - 3y = 0.$$

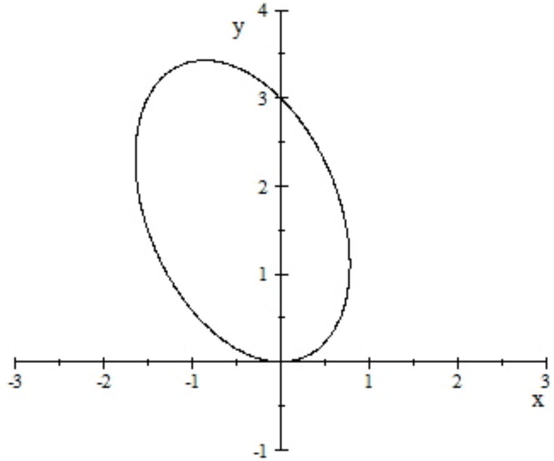
La matrice dell'equazione è

Calcoliamo

$$\mathbf{I}_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} = -9/2 \neq 0$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

$$\mathbf{I}_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = 7/4 > 0$$



Identifichiamo la Conica…

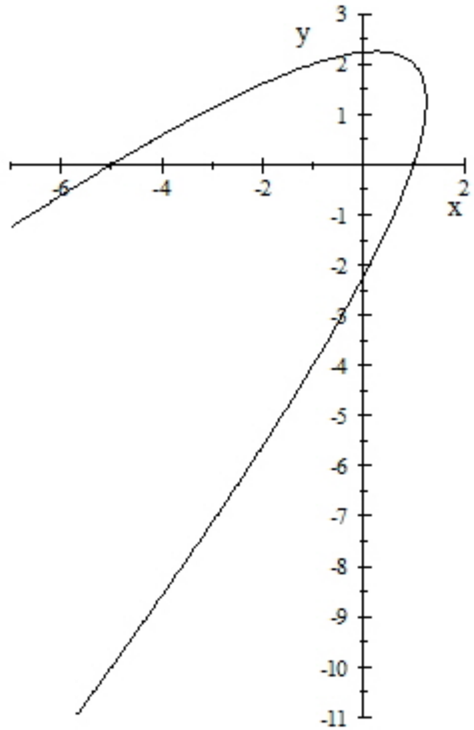
$$\ldots\ x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 5 = 0.$$

La matrice dell'equazione è

Calcoliamo

$$\mathbf{I}_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

$$\mathbf{I}_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$



Identifichiamo la Conica…

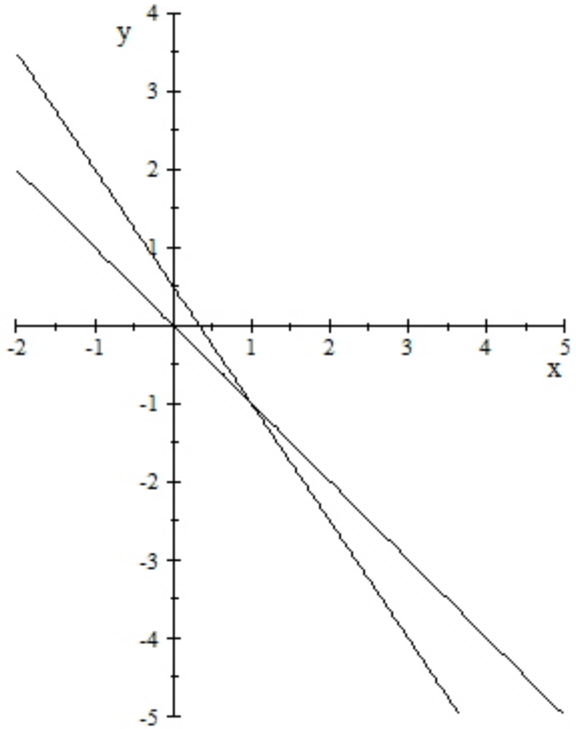
$$\ldots\ 3x^2 + 5xy + 2y^2 - x - y = 0.$$

La matrice dell’equazione è

Calcoliamo

$$\mathbf{I}_3 = \det\begin{bmatrix} 3 & 5/2 & -1/2 \\ 5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{I}_2 = \det\begin{bmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 2 \end{bmatrix} = -1/4 < 0$$



Approfondimenti: Forma delle Coniche

- **Osservazione:** data una conica non degenere

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

la distanza **L** del fuoco dalla direttrice e l'eccentricità **e** determinano completamente la forma della conica.

I **parametri geometrici** **L** ed **e** devono allora potersi esprimere in termini degli invarianti

$$I_1 \qquad I_2 \qquad I_3$$

Approfondimenti: Forma delle Coniche

- data una conica non degenere

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

L'**equazione caratteristica** è

$$\boxed{t^2 - I_1 t + I_2 = 0}$$

e le relative soluzioni

$$\boxed{t_\pm = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^{\,2} - 4I_2}}{2}}$$

Approfondimenti: Forma delle Coniche

- **Teorema:**

Ellisse, Iperbole →

$$L = \sqrt{\left| \frac{I_3}{I_2} \frac{t_-}{t_+ \left(t_+ - t_- \right)} \right|}$$

$$e = \sqrt{\frac{t_+ - t_-}{t_+}}$$

Parabola →

$$L = \sqrt{\left| \frac{I_3}{I_1^{\,3}} \right|}$$

Coniche e realtà

Esercizio

Cosa succede se punto una torcia contro il muro ?

Che "forma" ha il fascio di luce se punto la torcia con il braccio i… …to al muro?

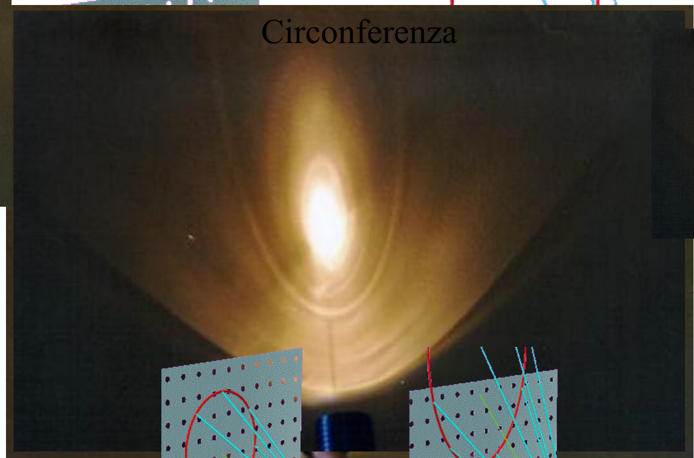
braccio p… …to al muro?

Risposta: si … *cono di luce*

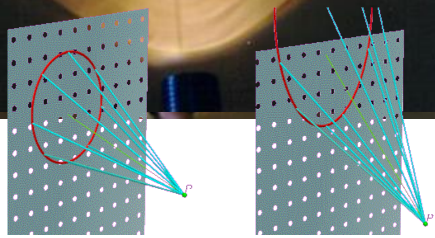
Risposta: si … circonferenza

Circonferenza

Ellisse



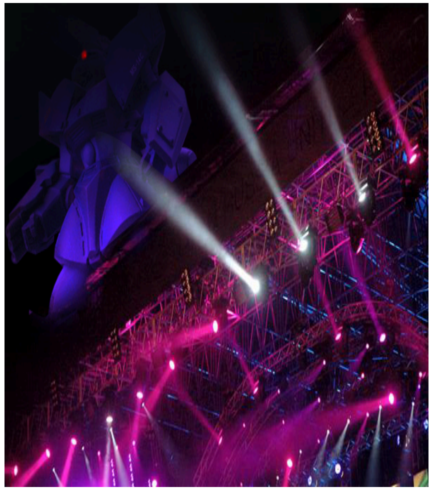
Iperbole



Cono

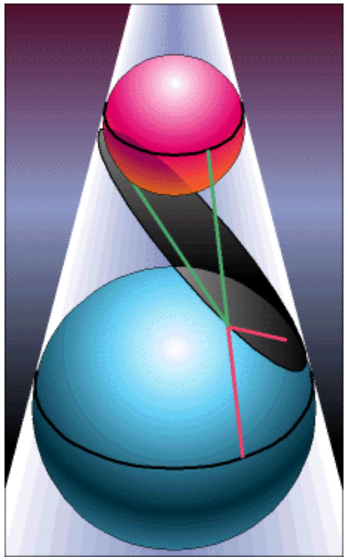
Applicazioni

Le coniche nella realtà “concreta”



Sfere di Dandelin.

Le coniche viste come ombra di una sfera: descrizione sintetica di fuochi e direttrici di una conica.



Una sezione conica possiede una o due sfere di Dandelin caratterizzate dalla proprietà:
Una sfera di *Dandelin* e' tangente sia al piano che al cono.

Sfere di Dandelin

Ellisse o circonferenza

due sfere di Dandelin

Parabola

una sfera di Dandelin

Iperbole

due sfere di Dandelin

Proprietà:

"Il punto nel quale una sfera tocca il piano è un fuoco della sezione conica"