



Tematiche delle Olimpiadi della Matematica

- √ Geometria
- ✓ Algebra
- ✓ Logica
- ✓ Statistica e Calcolo delle Probabilità



Teoria delle probabilità

La **probabilità** è un numero, compreso tra 0 e 1, che indica il grado di possibilità che un certo evento si verifichi: esso è 1 se l'evento è certo, 0 se è impossibile.

Laplace propose quella che è detta la definizione classica di probabilità:

"La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi siano egualmente possibili"

Per esempio, supponiamo di avere un dado "perfetto", per cui tutte le facce siano equiprobabili, allora l'evento "uscita di un numero dispari" (cioè 1, 3 o 5) ha probabilità:

$$\frac{3}{6} = 0.50$$



Dalla concezione classica alla frequentista

Dalle critiche alla definizione classica di probabilità, anche in conseguenza dei progressi delle scienze sperimentali, si sviluppò una nuova concezione della probabilità: la *concezione frequentista*, che si può applicare quando si possono eseguire tante prove quante si vogliono sull'evento, oppure sono disponibili tavole con i risultati di rilevazioni statistiche relative a un certo fenomeno (ad esempio, le tavole di mortalità e di sopravvivenza).

Secondo la concezione frequentista, per conoscere la probabilità di un evento si deve ricorrere all'esperimento.

È importante rilevare che per un frequentista non ha senso calcolare la probabilità di una singola prova, perché non si può prevedere il risultato di un singolo esperimento, mentre in una gran successione di prove si riscontra una sorprendente regolarità.



La concezione frequentista è basata sulla definizione di *frequenza relativa* di un evento.

DEFINIZIONE

Si definisce **frequenza relativa** di un evento in n prove effettuate nelle stesse condizioni, il rapporto fra il numero k delle prove nelle quali l'evento si è verificato e il numero n delle prove effettuate:

$$f(A)=k/n$$
.

La frequenza dipende non solo da *n*, numero delle prove fatte, ma, per uno stesso *n*, può variare al variare del gruppo delle prove.



Von Mises sostenne che per probabilità del verificarsi di un certo evento in una successione casuale di eventi simili e ripetibili doveva intendersi il limite al quale tende la frequenza relativa di quell'evento quando il numero dei termini della successione cresce indefinitamente, ovviamente in casi in cui questo limite esiste.

Lim fn(A)=p(A), A evento e n numero di prove

Questa definizione ha un carattere di generalità maggiore della precedente, anche se non viene superata l'insufficienza logica. Infatti non possiamo affermare che il limite si presenterà con certezza, ma con grande probabilità.

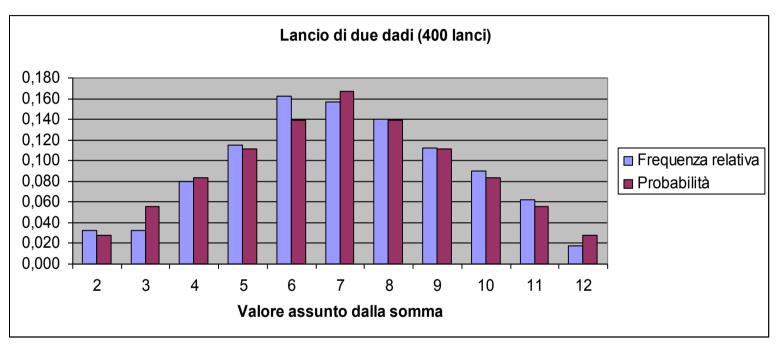


Legge empirica del caso: in una serie di prove, ripetute un gran numero di volte, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza "tende" ad assumere valori prossimi alla probabilità dell'evento e, generalmente, l'approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove eseguite.

Bisogna applicare con attenzione tale legge, in quanto afferma che se si eseguono numerose prove su un evento, la frequenza ordinariamente si discosta di poco dalla probabilità, ma ciò non esclude che qualche volta, anche se raramente, la frequenza, che è un valore sperimentale, assuma valori non attesi.



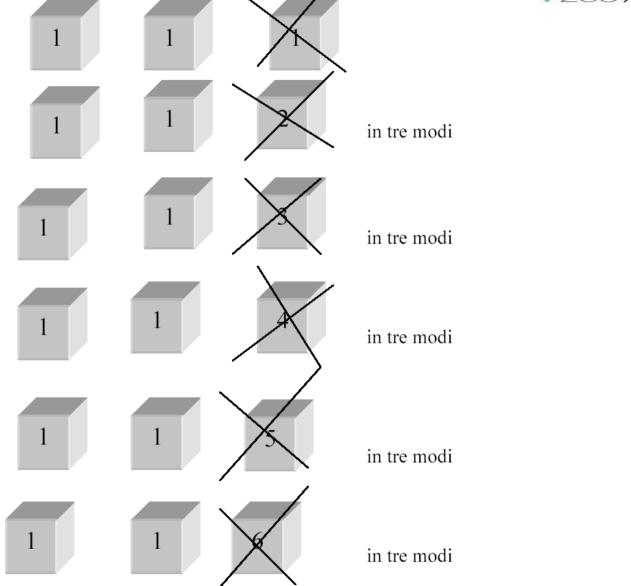
Analizziamo la situazione ...



VALORE MEDIO (FREQUENZA)	VALORE MEDIO (PROBABILITA')
6,895	7,000
VARIANZA (FREQUENZA)	VARIANZA (PROBABILITA')
5,944	5,833

Laboratorio di Statistica





Salto in alto... oltre le formule



Calcolo Combinatorio

- ✓ Disposizioni
- ✓ Disposizioni con ripetizione
- ✓ Permutazioni
- ✓ Combinazioni semplici
- ✓ Combinazioni con ripetizione



Disposizioni semplici

Definiamo come **numero di disposizioni** di n oggetti di classe k, tutti i modi distinti in cui si possono disporre k oggetti scelti tra gli n (ovviamente k ≤ n).

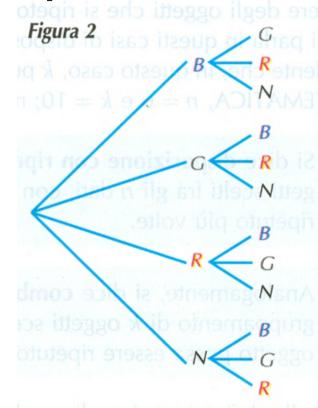
Esempio

Un concessionario di automobili vuole esporre nella vetrina del suo salone quattro autovetture (n) tutte dello stesso tipo ma con colori diversi e cioè: blu, grigio, rosso e nero. La vetrina dispone però solo di due posti (k). In quanti modi il concessionario può disporre le automobili nella sua vetrina?



Disposizioni semplici

Diagramma ad Albero



I scelta: 4 II scelta: 3

Possibili coppie = 4*3 = 12

Numero di disposizioni di 4 oggetti di classe 2 $(D_{4,2}) = 4*3=12$



Figura 3

Disposizioni semplici

Se i posti diventano 3:

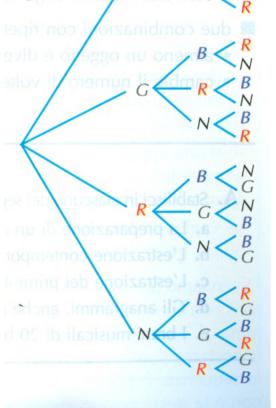
Diagramma ad Albero

I scelta: 4 II scelta: 3 II scelta: 2

Possibili coppie = 4*3*2 = 24

Numero di disposizioni di 4 oggetti di classe 3

$$(D_{4,3})=4*3*2=24$$





Disposizioni semplici

Definiamo come **numero di disposizioni** di n oggetti di classe k, tutti i modi distinti in cui si possono disporre k oggetti scelti tra gli n (ovviamente $k \le N$).

Numero delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k che si indica con $(D_{n,k})$ è uguale al prodotto di k numeri interi consecutivi e decrescenti a partire da n:



Disposizioni con ripetizione

Supponiamo ora che nel caso precedente, tra i k oggetti disposti, si possano ripetere i singoli oggetti (e quindi può anche essere k > N). È questo per esempio il caso dei numeri scritti con la notazione posizionale, quindi il problema equivale al seguente: quanti numeri si possono scrivere con k cifre usando la base N?

Esempio

Consideriamo l'insieme A = {1, 5, 3, 8}, quanti numeri di due cifre si possono formare con gli elementi di A? (in questo caso è importante l'ordine).

Utilizziamo anche stavolta il diagramma ad albero:

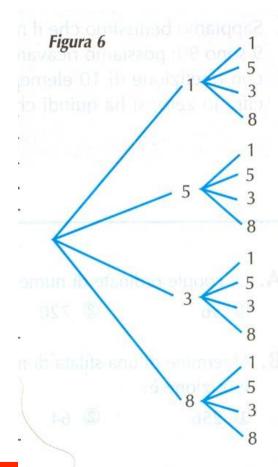


Disposizioni con ripetizione

Utilizziamo anche stavolta il diagramma ad albero:

$$D_{r,n,k} = D_{r,4,2} = 16 = 4^2$$

 $D_{r,n,k} = n^k$





Permutazioni

Definiamo come **numero permutazioni** di N oggetti di classe N, tutti i modi distinti in cui si possono disporre N oggetti scelti tra gli N. Il numero di permutazioni di oggetti non è altro che il numero di ordinamenti possibili di N oggetti.

Esempio

Per esempio, siano gli N oggetti un mazzo di 40 carte da gioco, in quanti modi distinti possiamo mescolarle?

$$P_N = D_{n,n} = n * (n-1) * (n-2) * ... *3*2*1$$

n! = n(n-1)(n-2)(n-3)...3*2*1

$$P_N = n!$$



Combinazioni semplici

Supponiamo ora di avere N oggetti distinti e di volerne scegliere da questi k, senza tenere conto dell'ordinamento.

Un tale tipo di scelta è detto "combinazione".

Esempio 1

In quanti modi diversi possiamo estrarre 5 numeri da un'urna contenente i numeri da 1 a 90 ? (cioè, quale è il numero totale delle cinquine del gioco del lotto ?).

Esempio 2

Dati gli oggetti a, b, c vogliamo calcolare il numero di combinazioni semplici di classe 2.



Combinazioni semplici

Possibili coppie: ab, ac, bc, ba, ca, cb

Non ha importanza l'ordine quindi ab=ba, ac=ca, bc=cb

Coppie: ab, bc, ac

Il loro numero è pari al rapporto tra il numero delle disposizioni di 3 elementi presi a 2 a 2 ed il numero 2 che a sua volta rappresenta il numero di permutazione di due elementi:

$$C_{3,2} = D_{3,2} / 2!$$

In generale:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\mathbb{K}(n-k+1)}{k!}$$



Coefficiente Binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\mathbb{K}(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Consideriamo lo sviluppo della potenza n-ma del binomio $(a + b)^n$. Scriviamolo in dettaglio per i casi più semplici:

$$(a+b)^{2} = (a+b) \cdot (a+b) = a^{2} + 2ab + b^{2}$$

$$(a+b)^{3} = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = a^{3} + 3a^{2}b + 3ab^{2} + b^{3}$$

$$(a+b)^{4} = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b)$$

$$= a^{4} + 4a^{3}b + 6a^{2}b^{2} + 4ab^{3} + b^{4}.$$



Coefficiente Binomiale

$$(a+b)^{n} = a^{n} + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^{2} + \cdots$$

$$+ \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^{n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}a^{n-i}b^{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!i!}a^{i}b^{n-i}.$$



Combinazioni con ripetizioni

Le **combinazioni con ripetizione** di un insieme finito di n elementi di classe k sono tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare con k elementi, presi tra gli n, senza considerare l'ordine con il quale gli elementi sono presi, ma con la possibilità che gli elementi si ripetano:

$$C'_{n;k} = {n+k-1 \choose k} = \frac{(n+k-1)\cdot (n+k-2)\cdot \dots \cdot n}{k!}$$
.

10



Correzione Test

10

La risposta è (D).

Supponiamo di aver scelto uno qualsiasi dei quindici giocatori della prima squadra; nella seconda squadra abbiamo la possibilità di scegliere tra quatordici giocatori (tutti eccettuato quello con lo stesso numero di maglia del giocatore scelto dalla prima squadra). Scelto anche il giocatore della seconda squadra, per scegliere il giocatore della terza squadra abbiamo tredici possibilità. Complessivamente abbiamo $15 \times 14 \times 13 = 2730$ possibilità distinte.



Esempio 1

Si vede che in questo caso ci troviamo di fronte a un problema di disposizioni con ripetizione, dove N è eguale a 3 e k eguale a 13, quindi il numero totale è 3¹³ =1594323.

Si noti tuttavia che in genere la probabilità di indovinare il pronostico è maggiore di 1/3¹³, perché gli scommettitori possono avere informazioni a priori: a parte le informazioni sulla forza delle due squadre relative ad ogni partita, o ad informazioni particolari sullo stato di forma dei giocatori, è noto che comunque è favorita la squadra di casa e quindi conviene puntare su pronostici con più "1" che "2".

Una ricerca fatta su oltre 30000 partite inserite nelle schedine del totocalcio in oltre 50 anni, ha evidenziato le seguenti percentuali:

1: 47%, 2: 18%, X: 35%

Quindi la colonna vincente più probabile è quella che prevede tutte vittorie in casa (tutti 1).

Salto in alto... oltre le formule



Esempio 2

4. Quali sono le probabilità delle varie vincite al gioco del Lotto?

Nel gioco del Lotto si estraggono per ogni concorso 5 numeri da un'urna che ne contiene 90 (i numeri da 1 a 90). Vengono quindi premiati i giocatori che indovinano 1 ("estratto semplice"), 2 ("ambo"), 3 ("terno"), 4 ("quaterna") o tutti e 5 ("cinquina").

Per calcolare le probabilità dei vari tipi di vincita, calcoliamo prima quante sono le possibili combinazioni di k oggetti su N possibili. Come sappiamo questi sono $\binom{N}{k}$, quindi il

numero di tutti i possibili estratti semplici, ambi, terni, quaterne e cinquine è rispettivamente

$$\binom{90}{1} = 90, \binom{90}{2} = 4005, \binom{90}{3} = 117480, \binom{90}{4} = 2555190, \binom{90}{5} = 43949268.$$

Ma con 5 numeri estratti possiamo avere $\binom{5}{1} = 5$ estratti semplici, $\binom{5}{2} = 10$ ambi, $\binom{5}{3} = 10$

terni, $\binom{5}{4} = 5$ quaterne e $\binom{5}{5} = 1$ cinquina, quindi per calcolare le probabilità dobbiamo calcolare i rispettivi rapporti tra queste due quantità. Si ha



Esempio 2

	Probabilità	Il Lotto paga	Rapporto tra vincita equa e vincita vera
Estratto semplice	$\frac{1}{18}$	11.232	1.602
Ambo	$\frac{2}{801}$	250	1.602
Terno	$\frac{1}{11748}$	4250	2.764
Quaterna	$\frac{1}{511038}$	80000	6.388
Cinquina	$\frac{1}{43949268}$	1000000	43.949

Nella tabella sono anche riportate le vincite pagate dal Lotto (in numero di volte la posta). I calcoli sono stati fatti supponendo le giocate su una sola "ruota".



La logica

La logica è lo studio dei metodi e dei principi utilizzati per distinguere il ragionamento corretto da quello scorretto.

Ragionamento: susseguirsi di affermazioni legate da relazioni o legami di consequenzialità che se rispettati producono un ragionamento corretto.



Esercizi di logica

Esercizio 1. Calcola le tavole di verità delle seguenti formule:

$$\bullet A \rightarrow (B \rightarrow A);$$

•
$$(A \lor B) \to (\neg A \land (B \to C);$$

•
$$(A \leftrightarrow A) \rightarrow (B \leftrightarrow \neg B)$$
.

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$



I Quantificatori



Esercizi di traduzione di enunciati in formule complesse usando il quantificatore esistenziale o quello universale

- 1. c'è almeno una sfera rossa
- 2. (tutti) gli elefanti sono grigi
- 3. c'è un cubo blu sotto il tavolo
- 4. è tutto grigio
- 5. non c'è nulla di rosso
- 6. non c'è nulla di bello
- 7. tutti i cubi sono verdi
- 8. alcuni cubi sono verdi
- 9. nessuna sfera è verde
- 10. tutti gli uomini sono mortali
- 11. i cani e i gatti sono animali domestici
- 12. padri e madri sono genitori



Esercizi di traduzione di enunciati in formule complesse usando il quantificatore esistenziale o quello universale

- 13. chi canta a tavola e a letto è un matto perfetto
- 14. Tutto è bello e buono
- 15. c'è qualcosa che se è bello, è anche buono
- 16. tutti i marziani sono verdi
- 17. gli alberi sono vegetali
- 18. gli scultori sono artisti
- 19. alcuni conigli sono animali domestici
- 20. gli svizzeri sono puntuali
- 21. ci sono italiani puntuali
- 22. la pizza alla diavola è piccante
- 23. chi dorme non piglia pesci
- 24. le bici da passeggio non hanno le marce
- 25. le mountain bike hanno le marce



LOG 11

GIOCHI DI ARCHIMEDE BIENNIO 9

Qual è la negazione della frase Ogni studente della I A ha almeno 2 cugini?

- (A) Nessuno studente della I A ha cugini
- (B) tutti gli studenti della I A hanno un cugino
- (C) almeno uno studente della I A ha un solo cugino
- (D) almeno uno studente della I A non ha cugini
- (E) nessuna delle precedenti è la negazione della frase data.

LOG 12

GARA PROVINCIALE 97

100 delegati sono riuniti in congresso. Non tutti portano la cravatta, ma si sa che comunque se ne scelgano due, almeno uno dei due la porta. Quanti sono i congressisti con cravatta?

- (A) Almeno 2, ma possono essere meno di 50
- (B) esattamente 50
- (C) più di 50, ma non si può dire esattamente quanti
- (D) la situazione descritta è impossibile
- (E) nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

LOG 13

GIOCHI DI ARCHIMEDE TRIENNIO 98

Qual è la negazione di *Tutti i numeri perfetti sono pari*? (Non è necessario sapere cos'è un numero perfetto.)

- (A) Tutti i numeri perfetti sono dispari
- (B) c'è almeno un numero perfetto dispari
- (C) c'è almeno un numero pari che non è perfetto
- (D) nessun numero dispari è perfetto
- (E) nessun numero pari è perfetto.

La logica



LOG 14

GIOCHI DI ARCHIMEDE BIENNIO 99

In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti promossi. Volendo negare questa affermazione, quale dei seguenti enunciati sceglieresti?

- (A) In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti bocciati
- (B) in ogni scuola c'è almeno un bocciato in tutte le classi
- (C) c'è almeno una scuola che ha almeno un bocciato in ogni classe
- (D) c'è almeno una scuola che ha dei promossi in ogni classe
- (E) c'è almeno una scuola in cui c'è una classe che ha almeno un bocciato.

LOG 15

GIOCHI DI ARCHIMEDE BIENNIO 95

Archimede ha dimostrato che ogni numero intero pari soddisfa una certa proprietà che chiameremo P. Da questo fatto, quale delle seguenti affermazioni, relativa ad un intero n, risulta vera?

- (A) Se n soddisfa P allora n è pari
- (B) ogni intero dispari non soddisfa P
- (C) esistono numeri dispari che non soddisfano P
- (D) se n non soddisfa P allora n è dispari
 - (E) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

LOG 16

GIOCHI DI ARCHIMEDE TRIENNIO 98

Sappiamo che una sola delle tre seguenti relazioni è vera: $x=5,\,x>5,\,x\leq 5.$ Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

- (A) x = 5 (B) $x \neq 5$ (C) x > 5 (D) x < 5 (E) x > 5.