di: Sebastiano Cappuccio

Livello: primo biennio di scuola secondaria superiore
Materia: matematica
Tempo richiesto: 1 ora

Premessa metodologica
Anche questa attività si articola sotto forma di situazione da esplorare, formulazione di una congettura e successiva dimostrazione.

Presentazione del problema
La situazione che qui si vuole esplorare è la divisibilità dei binomi della forma $x^n + 1$ e di quelli della forma $x^n - 1$ per $x - 1$ e per $x + 1$.

Fase 1
(Costruzione della prima colonna)
Aprire Foglio elettronico e costruire una colonna di numeri naturali consecutivi, partendo, ad esempio, da 1.
Ci sono molti modi per realizzarlo. Si consiglia di generare una successione agendo sulla riga del titolo (quella caratterizzata dalla presenza, nella colonna più a sinistra, di un “rombettino” nero).
Portarsi su questa cella e digitare, ad esempio:

=seq(k,k,1,100)

Premendo ENTER viene generata la successione dei numeri naturali di valore iniziale 1, passo (sottinteso) 1, fino al valore finale 100.

Fase 2
(Completamento della prima riga)
Nella cella D1 digitare 1.
Nella cella B1 digitare: = x^(a1)+d1.
Nella cella C1 digitare: = factor(b1)

Tutti i riferimenti sono relativi (vedi Attività 8), tranne quello contenuto nella cella B1: invece di D1 è stato scritto D1. Questo costituisce un riferimento assoluto al contenuto della cella D1. Ciò significa che, indipendentemente dalla cella in cui ci si ritrova, si farà riferimento proprio alla cella indicata.

Fase 3
(Completamento del Foglio)
Evidenziare le celle B1 e C1 (cliccando sulla prima cella e spostando il mouse tenendo premuto il pulsante di sinistra) e copiarle in basso fino alla posizione desiderata (ad esempio la ventesima riga) seguendo una procedura che ormai dovrebbe essere nota (vedi Attività 8).
Nota: si consiglia di allargare le colonne B e C per una maggiore leggibilità. Per ridimensionare una colonna: cliccare sulla lettera che la individua (il cursore assuma la forma di una doppia freccia) e, tenendo premuto il pulsante sinistro del mouse, spostarlo fino a raggiungere le dimensioni desiderate.

	A	B	C	D	E
◆	=seq(n,				
1	1	x+1	x+1	1	
2	2	x^2+1	x^2+1		
3	3	x^3+1	(x+1)*(x^2−x+1)		
4	4	x^4+1	x^4+1		
5	5	x^5+1	(x+1)*(x^4−x^3…		
6	6	x^6+1	(x^2+1)*(x^4−x…		
7	7	x^7+1	(x+1)*(x^6−x^5…		
8	8	x^8+1	x^8+1		
9	9	x^9+1	(x+1)*(x^2−x+1…		
10	10	x^10+1	(x^2+1)*(x^8−x…		
11	11	x^11+1	(x+1)*(x^10−x^…		
12	12	x^12+1	(x^4+1)*(x^8−x…		

A | =seq(n,n,1,100)

Fase 4
(Formulazione della congettura e sua dimostrazione)
A questo punto è molto facile formulare la congettura che il binomio $x^n + 1$ sia divisibile per il binomio $x + 1$ se e solo se n è dispari.
La dimostrazione non è difficile, ma forse è opportuno farla in sede di sintesi dei lavori di gruppo. Un modo potrebbe essere il seguente.
Se $x^n + 1$ è divisibile per $x + 1$, allora –1 sarebbe un suo zero, quindi $(-1)^n + 1 = 0$ ovvero $(-1)^n = -1$.
Quindi la potenza n-esima di -1 è negativa e ciò avviene se e solo se n è dispari.

Fase 5
(Seconda congettura)
Sostituire il contenuto della cella D1 con –1.
Automaticamente i contenuto di tutte le celle viene aggiornato.
E' molto facile formulare la congettura che $x^n - 1$ sia sempre divisibile per $x - 1$ qualunque sia n e successivamente dimostrarla.

	A	B	C	D	E
◆	=seq(n,				
1	1	x−1	x−1	-1	
2	2	x^2−1	(x−1)*(x+1)		
3	3	x^3−1	(x−1)*(x^2+x+1)		
4	4	x^4−1	(x−1)*(x+1)*(x^…		
5	5	x^5−1	(x−1)*(x^4+x^3…		
6	6	x^6−1	(x−1)*(x+1)*(x^…		
7	7	x^7−1	(x−1)*(x^6+x^5…		
8	8	x^8−1	(x−1)*(x+1)*(x^…		
9	9	x^9−1	(x−1)*(x^2+x+1…		
10	10	x^10−1	(x−1)*(x+1)*(x^…		
11	11	x^11−1	(x−1)*(x^10+x^…		
12	12	x^12−1	(x−1)*(x+1)*(x^…		

D1 | -1