2007-2013

Sfide di Matematica

Corso PON "Competenze per lo sviluppo"

Liceo

"A. Galizia"

Nocera Inferiore

Ing. Ivano Coccorullo – Prof.ssa Daniella Garreffa

PROBABILITA'

Eventi certi, impossibili e casuali

Nella scienza e nella tecnologia è fondamentale il principio secondo il quale ogni volta che si realizza un insieme di **condizioni C** si richiede che si presenti **l'evento A**.

Un evento che si presenta **senza alcuna incertezza**, per ogni realizzazione dell'insieme di **condizioni C**, si dice **certo**.

Un evento che, data la realizzazione di un insieme di **condizioni C**, non si realizza mai, si dice **impossibile**.

Un evento A che, data la realizzazione di un insieme di **condizioni C**, può accadere oppure no, si dice **casuale** o **aleatorio**.

Eventi casuali

Per alcuni fenomeni di questo tipo si può non solo affermare semplicemente la casualità dell'evento A, ma anche fornire una stima approssimativa della possibilità che esso si verifichi.

SCOPO DELLA PROBABILITA'

Spazio delle probabilità ed Eventi

Con il termine **prova** (o **tentativo**) s'intende una singola esecuzione di un ben determinato esperimento. Da questa prova si ottiene un singolo risultato elementare (o eventualità o **campione**)

Si chiama **spazio delle probabilità**, associato a un dato esperimento, l'insieme S di tutti i possibili risultati.

Si chiama **evento** un sottoinsieme A dello spazio S, cioè un insieme di risultati possibili.

Un evento si dice:

- ✓ elementare, se è un insieme con un solo elemento;
- ✓ certo, se coincide con S;
- ✓ impossibile, se è l'insieme vuoto.

Linguaggio della Probabilità

Diremo che in una prova si **verifica** (o si realizza) l'evento A, se il risultato a della prova appartiene ad A. In caso opposto si dice che in quella prova non si verifica l'evento.

Un risultato che verifica un evento si dice **favorevole** all'evento.

I risultati che, verificandosi in una prova, realizzano l'evento A, si chiamano **modalità dell'evento A**.

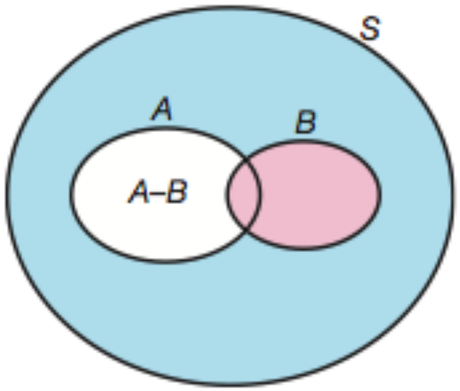
Dal momento che gli eventi sono insiemi, ogni affermazione relativa a eventi può essere espressa con il **linguaggio degli insiemi**, e viceversa.

In particolare, avremo un'algebra degli eventi corrispondente all'algebra degli insiemi. Usando le operazioni tra insiemi su eventi di S si possono ottenere nuovi eventi di S.

Due eventi…

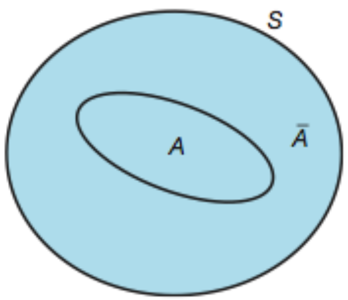
Così, se **A e B** sono due **eventi** (appartenenti a una medesima prova), si chiama:

- ✓ **evento somma** di A e B, e si indica con A∪B, l'evento C che risulta dal verificarsi di **almeno**
- ✓ **evento prodotto** di A … , l'evento C che risulta dal verificarsi di **entramb**
- ✓ **evento differenza** tra … - B, l'evento che consiste nel fatto che accada l' … o B.



Linguaggio della Probabilità

due eventi A e $\overline{A}$ si dicono opposti (o complementari, o contrari) quando uno di essi non si verifica se e solo se si verifica l'altro.



$\overline{S} = \emptyset \qquad \overline{\emptyset} = S \qquad A \cup \overline{A} = S \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset$

due eventi A e B si dicono **incompatibili** se sono disgiunti, cioè se risulta $A \cap B = \emptyset$. In altre parole, A e B sono incompatibili se non possono verificarsi simultaneamente;

se risulta $A \subseteq B$, si dice che A **implica** B.

Proprietà additiva della probabilità

Teorema 1

Se A e B sono due eventi **incompatibili**, si ha:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (1)$$

Dimostrazione

Siano $P(A) = \frac{m_1}{n}$ e $P(B) = \frac{m_2}{n}$.

Poiché, per ipotesi, gli eventi A e B sono incompatibili, gli m_1 risultati favorevoli ad A sono diversi dagli m_2 risultati favorevoli a B.
Vi sono dunque $m_1 + m_2$ risultati favorevoli a che si verifichi uno degli eventi A e B, cioè favorevoli a che si verifichi l'evento $A \cup B$.
Pertanto:

$$P(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

2007–2013

Proprietà additiva della probabilità

Teorema 2

Se A e B sono due eventi **qualsiasi**, risulta:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dimostrazione

Scriviamo gli eventi $A \cup B$ e B come somma di eventi incompatibili *(fig. 3)*:

$$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B) \qquad B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

e applichiamo il teorema 1:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \quad \text{e} \quad P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

Eliminando $P(\overline{A} \cap B)$ tra queste due eguaglianze si ottiene la relazione cercata:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

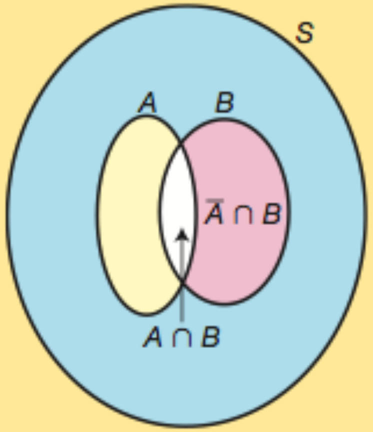


figura 3

Approccio Classico

La **probabilità** è un numero, compreso tra 0 e 1, che indica il grado di possibilità che un certo evento si verifichi: esso è 1 se l'evento è certo, 0 se è impossibile.

Laplace propose quella che è detta la definizione classica di probabilità:

"La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili,

purché questi siano egualmente possibili"

Dalla concezione classica alla frequentista

Dalle critiche alla definizione classica di probabilità, anche in conseguenza dei progressi delle scienze sperimentali, si sviluppò una nuova concezione della probabilità: la ***concezione frequentista***, che si può applicare quando si possono eseguire tante prove quante si vogliono sull'evento, oppure sono disponibili tavole con i risultati di rilevazioni statistiche relative a un certo fenomeno (ad esempio, le tavole di mortalità e di sopravvivenza).

Secondo la concezione frequentista, per conoscere la probabilità di un evento si deve ricorrere **all'esperimento**.
È importante rilevare che per un frequentista non ha senso calcolare la probabilità di una singola prova, perché non si può prevedere il risultato di un singolo esperimento, mentre in una gran successione di prove si riscontra una sorprendente regolarità.

La concezione frequentista è basata sulla definizione di ***frequenza relativa*** di un evento.

DEFINIZIONE

*Si definisce **frequenza relativa** di un evento in n prove effettuate nelle stesse condizioni, il rapporto fra il numero k delle prove nelle quali l'evento si è verificato e il numero n delle prove effettuate:*

$$f(A)=k/n.$$

La frequenza dipende non solo da n, numero delle prove fatte, ma, per uno stesso n, può variare al variare del gruppo delle prove.

Legge empirica del caso: *in un grande numero di prove, la frequenza relativa di un evento aleatorio ordinariamente si scosta di poco dalla probabilità dell'evento, e l'approssimazione è, in generale, tanto maggiore quanto più grande è il numero delle prove ripetute.*

Bisogna applicare con attenzione tale legge, in quanto afferma che se si eseguono numerose prove su un evento, la frequenza ordinariamente si discosta di poco dalla probabilità, ma ciò non esclude che qualche volta, anche se raramente, la frequenza, che è un valore sperimentale, assuma valori non attesi.