2007-2013

# Salto in alto… oltre le formule

*Corso PON "Competenze per lo sviluppo"*

Liceo Scientifico

"Bonaventura Rescigno"

*Ing. Ivano Coccorullo – Prof.ssa Laura Falcone*

***Legge empirica del caso***: *in un grande numero di prove, la frequenza relativa di un evento aleatorio ordinariamente si scosta di poco dalla probabilità dell'evento, e l'approssimazione è, in generale, tanto maggiore quanto più grande è il numero delle prove ripetute.*

Bisogna applicare con attenzione tale legge, in quanto afferma che se si eseguono numerose prove su un evento, la frequenza ordinariamente si discosta di poco dalla probabilità, ma ciò non esclude che qualche volta, anche se raramente, la frequenza, che è un valore sperimentale, assuma valori non attesi.

# II Parte

Laboratorio con l'utilizzo del foglio elettronico.

# Descrizione Attività di Laboratorio

**ESPERIENZA 3**

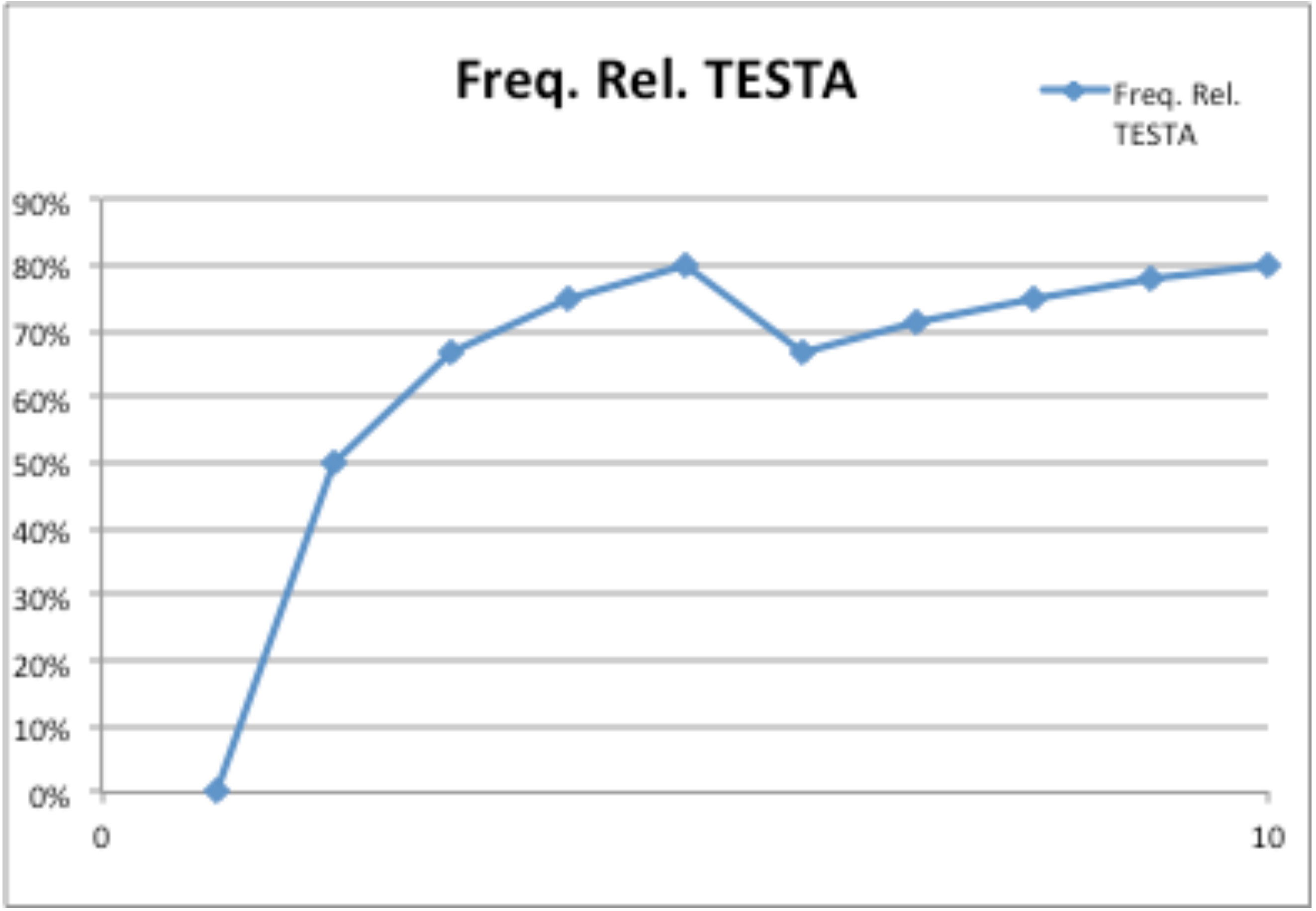
Lancia più volte una moneta, ad ogni lancio calcola la frequenza relativa all'evento "TESTA" e all'evento "CROCE". Alla fine verifica *la legge empirica del caso* andando a graficare con un istogramma come varia la frequenza relativa dell'evento "CROCE" all'aumentare del numero di lanci.

# LANCIO DI UNA MONETA

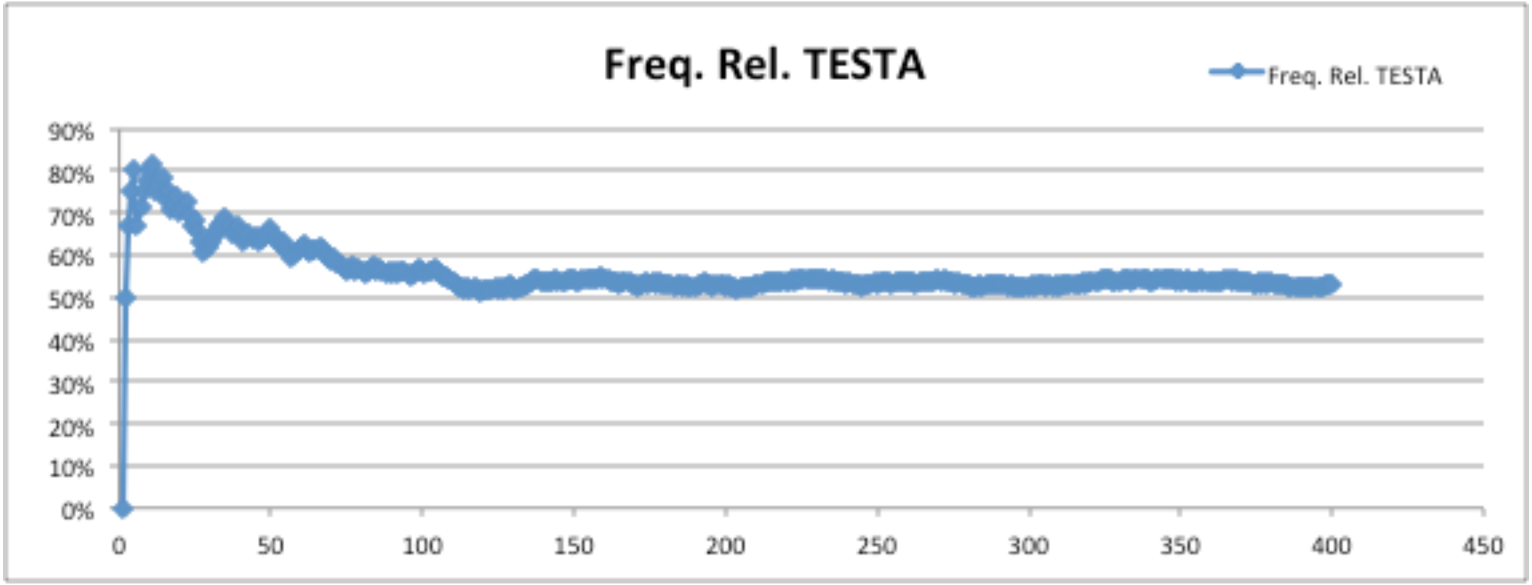
Presentiamo un esempio in cui, grazie all'utilizzo del foglio elettronico, verificheremo *la legge empirica del caso* o *legge dei grandi numeri.*

*In una serie di prove, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza tende ad assumere valori prossimi alla probabilità dell'evento, e l'approssimazione è tanto migliore quanto più grande è il numero delle prove eseguite.*

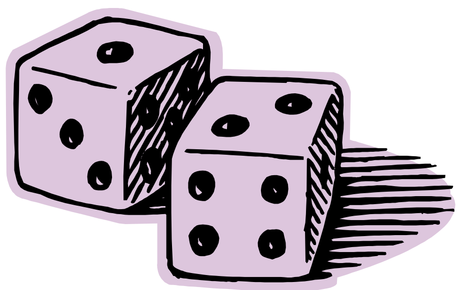
# LANCIO DI UNA MONETA



# LANCIO DI UNA MONETA

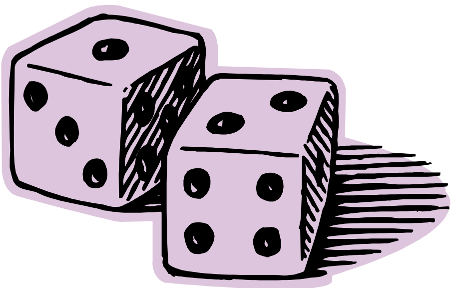


# Domande



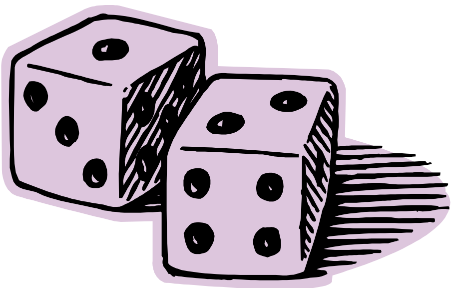
## Quesito 2

Si consideri una data estrazione in una determinata ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.



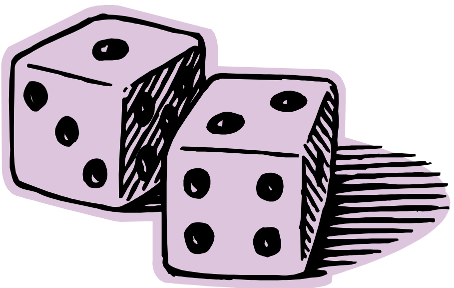
## Quesito 3

Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?



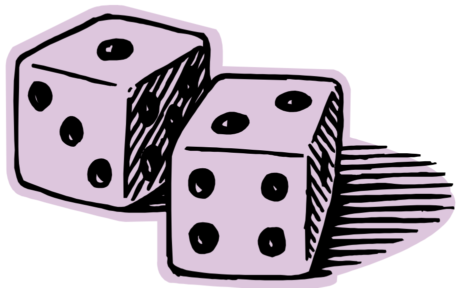
## Quesito 4

Considerate gli insiemi $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \{a; b; c\}$, quante sono le applicazioni (le funzioni) di $A$ in $B$?



## Quesito 7

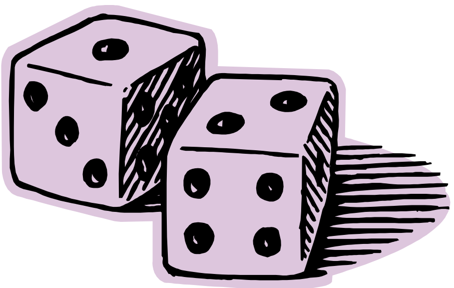
Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?



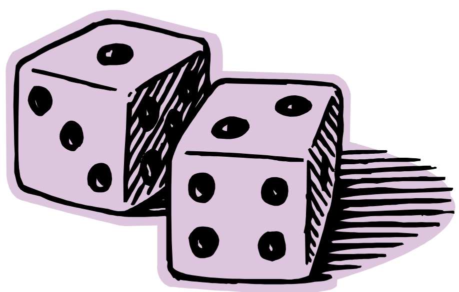
## Quesito 11

QUESITO 8
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i 16 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?



# Calcolo Combinatorio



# Calcolo Combinatorio

- ✓ Molti dei problemi classici di calcolo delle probabilità si riducono al calcolo dei casi favorevoli e di quelli possibili. Quando le situazioni diventano complicate e i ragionamenti intuitivi non bastano più, la possibilità di risolvere tali problemi è legata all'abilità di eseguire operazioni di **calcolo combinatorio**.
- ✓ Il **calcolo combinatorio** è l'insieme delle tecniche che permettono di contare efficientemente il numero di possibili scelte, combinazioni, allineamenti etc. di oggetti scelti da insiemi con un numero finito di elementi.

# Calcolo Combinatorio

- ✓Disposizioni
- ✓Disposizioni con ripetizione
- ✓Permutazioni
- ✓Combinazioni

# Disposizioni semplici

Definiamo come **numero di disposizioni** di n oggetti di classe k, tutti i modi distinti in cui si possono disporre k oggetti scelti tra gli n (ovviamente $k \leq n$).

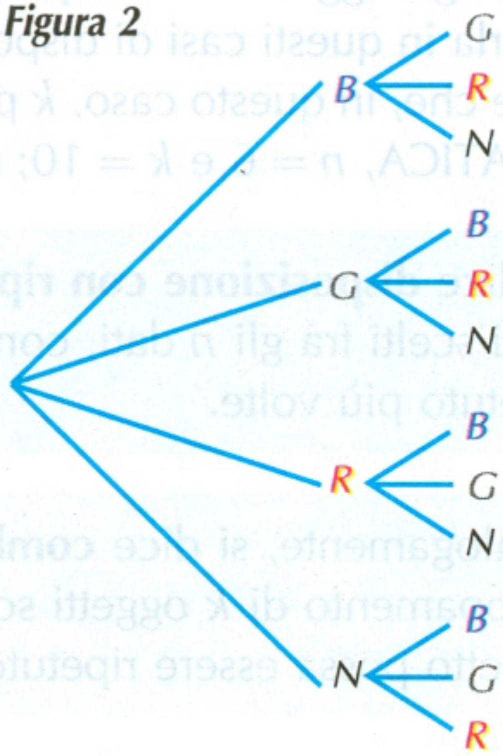
**Esempio**

Un concessionario di automobili vuole esporre nella vetrina del suo salone quattro autovetture (n) tutte dello stesso tipo ma con colori diversi e cioè: blu, grigio, rosso e nero. La vetrina dispone però solo di due posti (k). In quanti modi il concessionario può disporre le automobili nella sua vetrina?

# Disposizioni semplici

**Diagramma ad Albero**

Figura 2




**I scelta: 4    II scelta: 3**

**Possibili coppie = 4*3 = 12**

**Numero di disposizioni di 4 oggetti di classe 2 ($D_{4,2}$) = 4*3= 12**

# Disposizioni semplici

**Se i posti diventano 3:**

**Diagramma ad Albero**

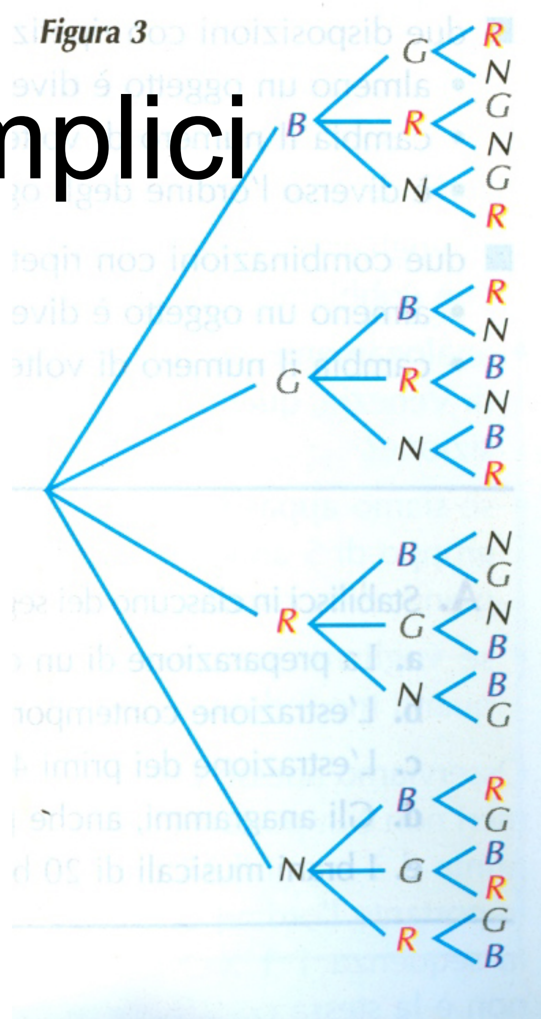



Figura 3

**I scelta: 4 II scelta: 3 II scelta: 2**

**Possibili coppie = 4*3*2 = 24**

**Numero di disposizioni di 4 oggetti di classe 3**

**$(D_{4,3})$=4*3*2= 12**

# Disposizioni semplici

Definiamo come **numero di disposizioni** di n oggetti di classe k, tutti i modi distinti in cui si possono disporre k oggetti scelti tra gli n (ovviamente $k \leq N$).

**Numero delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k che si indica con ($D_{n,k}$) è uguale al prodotto di k numeri interi consecutivi e decrescenti a partire da n:**

$$D_{n,k} = \underbrace{n * (n-1) * (n-2) * \ldots * (n-k+1)}_{\text{k fattori}}$$

# Disposizioni con ripetizione

Supponiamo ora che nel caso precedente, tra i k oggetti disposti, si possano ripetere i singoli oggetti (e quindi può anche essere $k > N$).

È questo per esempio il caso dei numeri scritti con la notazione posizionale, quindi il problema equivale al seguente: quanti numeri si possono scrivere con k cifre usando la base N?

**Esempio**

Consideriamo l'insieme $A = \{1, 5, 3, 8\}$, quanti numeri di due cifre si possono formare con gli elementi di A? (in questo caso è importante l'ordine).

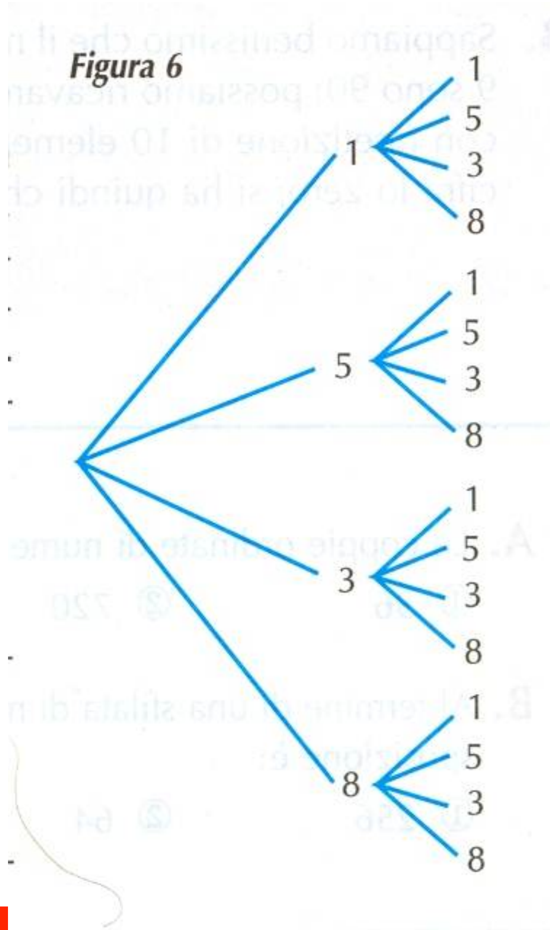
Utilizziamo anche stavolta il diagramma ad albero:

# Disposizioni con ripetizione

Utilizziamo anche stavolta il diagramma ad albero:

$$D_{r,n,k} = D_{r,4,2} = 16 = 4^2$$

$$\mathbf{D_{r,n,k} = n^k}$$



# Permutazioni

Definiamo come **numero permutazioni** di N oggetti di classe N, tutti i modi distinti in cui si possono disporre N oggetti scelti tra gli N.

Il numero di permutazioni di oggetti non è altro che il numero di ordinamenti possibili di N oggetti.

**Esempio**

Per esempio, siano gli N oggetti un mazzo di 40 carte da gioco, in quanti modi distinti possiamo mescolarle?

$$\mathbf{P_N = D_{n,n} = n * (n-1) * (n-2) * \ldots * 3 * 2 * 1}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3*2*1$$

$$\mathbf{P_N = n!}$$

# Combinazioni semplici

Supponiamo ora di avere N oggetti distinti e di volerne scegliere da questi k, senza tenere conto dell'ordinamento.

Un tale tipo di scelta è detto "**combinazione**".

**Esempio 1**

In quanti modi diversi possiamo estrarre 5 numeri da un'urna contenente i numeri da 1 a 90 ? (cioè, quale è il numero totale delle cinquine del gioco del lotto ?).

**Esempio 2**

Dati gli oggetti a, b, c vogliamo calcolare il numero di combinazioni semplici di classe 2.

# Combinazioni semplici

Possibili coppie: ab, ac, bc, ba, ca, cb

Non ha importanza l'ordine quindi ab=ba, ac=ca, bc=cb

Coppie: ab, bc, ac

Il loro numero è pari al rapporto tra il numero delle disposizioni di 3 elementi presi a 2 a 2 ed il numero 2 che a sua volta rappresenta il numero di permutazione di due elementi:

$\mathbf{C_{3,2} = D_{3,2} /2!}$

In generale:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

# Coefficiente Binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\mathbb{K}\,(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Consideriamo lo sviluppo della potenza $n$-ma del binomio $(a+b)^n$. Scriviamolo in dettaglio per i casi più semplici:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\,.
\end{aligned}$$

# Coefficiente Binomiale

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdot \\
&\quad + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + + b^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!i!} a^i b^{n-i} .
\end{aligned}
$$

# Coefficiente Binomiale

## Triangolo di Tartaglia

| $n$ | Coefficienti binomiali | $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 1 | 2 |
| 2 | 1 2 1 | 4 |
| 3 | 1 3 3 1 | 8 |
| 4 | 1 4 6 4 1 | 16 |
| 5 | 1 5 10 10 5 1 | 32 |
| 6 | 1 6 15 20 15 6 1 | 64 |
| 7 | 1 7 21 35 35 21 7 1 | 128 |
| 8 | 1 8 28 56 70 56 28 8 1 | 256 |

re le formule

# Esempio 1

Nel gioco del totocalcio si devono indovinare i risultati di 13 partite, segnando per ciascuna 1 se si prevede vinca la squadra di casa, 2 se si prevede che perda e X se si prevede un pareggio. Quante sono le possibili “colonne” vincenti del totocalcio ?

# Esempio 1

Si vede che in questo caso ci troviamo di fronte a un problema di disposizioni con ripetizione, dove N è eguale a 3 e k eguale a 13, quindi il numero totale è $3^{13}$ =1594323.

Si noti tuttavia che in genere la probabilità di indovinare il pronostico è maggiore di $1/3^{13}$, perché gli scommettitori possono avere informazioni a priori: a parte le informazioni sulla forza delle due squadre relative ad ogni partita, o ad informazioni particolari sullo stato di forma dei giocatori, è noto che comunque è favorita la squadra di casa e quindi conviene puntare su pronostici con più “1” che “2”.

Una ricerca fatta su oltre 30000 partite inserite nelle schedine del totocalcio in oltre 50 anni, ha evidenziato le seguenti percentuali:

1: 47%, 2: 18%, X: 35%

Quindi la colonna vincente più probabile è quella che prevede tutte vittorie in casa (tutti 1).

# Esempio 2

**4. Quali sono le probabilità delle varie vincite al gioco del Lotto ?**

Nel gioco del Lotto si estraggono per ogni concorso 5 numeri da un'urna che ne contiene 90 (i numeri da 1 a 90). Vengono quindi premiati i giocatori che indovinano 1 ("estratto semplice"), 2 ("ambo"), 3 ("terno"), 4 ("quaterna") o tutti e 5 ("cinquina").

Per calcolare le probabilità dei vari tipi di vincita, calcoliamo prima quante sono le possibili combinazioni di k oggetti su N possibili. Come sappiamo questi sono $\binom{N}{k}$, quindi il numero di tutti i possibili estratti semplici, ambi, terni, quaterne e cinquine è rispettivamente $\binom{90}{1}=90$, $\binom{90}{2}=4005$, $\binom{90}{3}=117480$, $\binom{90}{4}=2555190$, $\binom{90}{5}=43949268$.

Ma con 5 numeri estratti possiamo avere $\binom{5}{1}=5$ estratti semplici, $\binom{5}{2}=10$ ambi, $\binom{5}{3}=10$ terni, $\binom{5}{4}=5$ quaterne e $\binom{5}{5}=1$ cinquina, quindi per calcolare le probabilità dobbiamo calcolare i rispettivi rapporti tra queste due quantità. Si ha

# Esempio 2

| | Probabilità | Il Lotto paga | Rapporto tra vincita equa e vincita vera |
|---|---|---|---|
| **Estratto semplice** | $\frac{1}{18}$ | **11.232** | **1.602** |
| **Ambo** | $\frac{2}{801}$ | **250** | **1.602** |
| **Terno** | $\frac{1}{11748}$ | **4250** | **2.764** |
| **Quaterna** | $\frac{1}{511038}$ | **80000** | **6.388** |
| **Cinquina** | $\frac{1}{43949268}$ | **1000000** | **43.949** |

Nella tabella sono anche riportate le vincite pagate dal Lotto (in numero di volte la posta). I calcoli sono stati fatti supponendo le giocate su una sola "ruota".

## Quesito 2

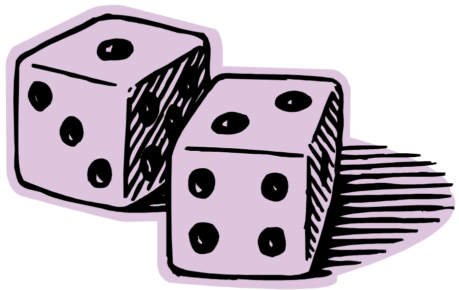
Si consideri una data estrazione in una determinata ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

### Risoluzione

Poiché nel gioco del Lotto non conta la posizione dei numeri estratti, supponiamo che 1 e 90 siano i primi due. Rimangono nell'urna 88 numeri. Essendo ininfluente l'ordine di estrazione, si tratta di calcolare il numero delle combinazioni semplici di 88 elementi a 3 a 3. Applicando la $\boxed{9}$ si ottiene:

$$C_{88;3} = \binom{88}{3} = \frac{88!}{3! \cdot 85!} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 85!} = 109\,736$$

che esprime il numero richiesto di possibili cinquine.



QUESITO 1
A.S. 2002/2003
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

## Quesito 3

Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

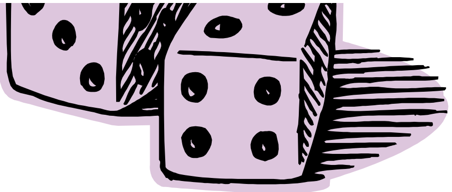
### Risoluzione guidata

Considerando solo il girone di andata, si tratta di determinare le combinazioni di 18 elementi a 2 a 2 e pertanto, per la 9:

$$C_{18;2} = \binom{18}{2} = \frac{18!}{2! \cdot 16!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16!}{2 \cdot 1 \cdot 16!} = 153$$

Complessivamente, andata e ritorno, si hanno quindi $153 \cdot 2 = 306$ partite.

Si poteva giungere allo stesso risultato pensando che la partita A contro B del girone di andata diventa la partita B contro A nel girone di ritorno e quindi contando come diverse partite dove appaiono le stesse squadre si ottiene che le partite sono pari alle disposizioni di 2 squadre distinte, ovvero alle disposizioni semplici di 18 elementi distinti di classe 2: $D_{18;2} = 18 \cdot 17 = 306$

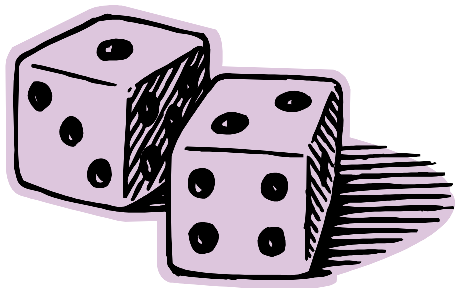


## Quesito 4

Considerate gli insiemi $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \{a; b; c\}$, quante sono le applicazioni (le funzioni) di $A$ in $B$?

### Risoluzione

In base alla definizione di funzione, per la quale a ogni elemento di $A$ si associa uno e un solo elemento di $B$, con gli elementi di $B$ che però possono essere ripetuti, le funzioni dall'insieme $A$ nell'insieme $B$ corrispondono a tutte le possibili disposizioni con ripetizione di 3 elementi presi a gruppi di 4, cioè, per la $\boxed{8}$: $D'_{3;4} = 3^4 = 81$.



QUESITO 10
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico

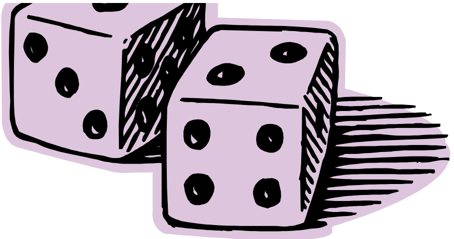
## Quesito 7

Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

### Risoluzione guidata

Le femmine sono 15 e devono essere scelte in gruppi di 3 Pertanto i modi di scelta delle ragazze sono le combinazioni di 15 elementi a 3 a 3 , cioè $C_{15;3}$ In maniera analoga si stabilisce che le combinazioni per i maschi sono $C_{12;2}$ Il numero delle possibili delegazioni si ottengono moltiplicando $C_{15;3}$ per $C_{12;2}$ , ottenendo:

$$C_{15;3} \cdot C_{12;2} = \binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} \cdot \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 11 = 30\,030.$$



QUESITO 8
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

## Quesito 11

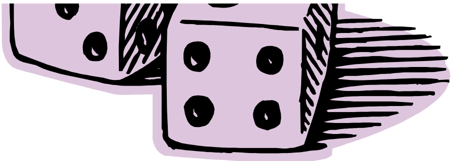
Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i 16 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

### Risoluzione guidata

I casi favorevoli sono costituiti dalle combinazioni dei 12 ragazzi presi 3 a 3 , mentre i casi possibili sono dati dalla combinazione dei 16 allievi sempre presi 3 a 3

Ricordando la **9**, risulta pertanto:

$$p = \frac{C_{12;3}}{C_{16;3}} = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{\frac{12!}{3! \cdot 9!}}{\frac{16!}{3! \cdot 13!}} = \frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2}}{\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2}} = \frac{220}{560} = \frac{11}{28}.$$



- Da un’indagine risulta che gli studenti immatricolati nell’anno accademico 2007/2008 a corsi di laurea del gruppo scientifico sono stati 8331, di questi 2389 si sono iscritti al corso di laurea in matematica e 157 si sono iscritti a l corso di laurea in astronomia. Calcolare la probabilità che uno studente, scelto a caso, sia iscritto al corso di laurea in matematica. Stesso calcolo per il corso di laurea in astronomia.

- Da una indagine su una popolazione risulta che una persona su 20 è mancina. Qual è la probabilità che una persona, presa a caso in quella popolazione, non sia mancina?

- In una confezione sono contenute 50 lampadine di cui 5 difettose. Se ne prende una a caso: qual è la probabilità che sia difettosa? Cosa succede nel caso se ne prendono due, contemporaneamente, qual è la probabilità che siano entrambe difettose?
- Si prenda a caso una pagina di un testo e si considerino le prime 100 parole. Si determinino le frequenze delle lettere dell'alfabeto che figurano alla fine di ogni parola. Determinare la probabilità per ogni lettera di comparire alla fine delle parole.
- Lancia 100 volte un dado a sei facce (puoi effettuare l'esperimento oppure fare una simulazione al computer). Qual è la frequenza relativa dell'evento *uscita del 6*? Qual è la probabilità dell'evento *uscita del 6* nel lancio di un dado? (Spiega le eventuali discordanze tra i due valori ottenuti).