Sfide di Matematica

Corso PON "Competenze per lo sviluppo"

Liceo

"A. Galizia"

Nocera Inferiore

Ing. Ivano Coccorullo – Prof.ssa Daniella Garreffa

ALGEBRA

Criteri di divisibilità

18) Qual è il più piccolo intero di cinque cifre divisibile per 3 e per 13?
(A) 10011 **(B)** 10020 **(C)** 10036 **(D)** 10062 **(E)** nessuno dei precedenti.

24) L'intero $n > 0$ in base dieci si scrive solo con le cifre 3 e 5 ed ha un numero dispari di cifre. Inoltre è divisibile per 11. Qual è il minimo numero di cifre che può avere n?
(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 11 **(D)** 15 **(E)** non esiste un tale n.

2007–2013

Criteri di divisibilità

per 2
un numero è divisibile per 2 se termina con zero o una cifra pari

per 3
un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è 3 o un multiplo di 3

per 4
un numero è divisibile per 4 se le ultime due cifre sono 00 oppure formano un numero multiplo di 4

Criteri di divisibilità

per 5
un numero è divisibile per 5 se la sua ultima cifra è 0 o 5

per 6
un numero è divisibile per 6 se è contemporaneamente divisibile per 2 e per 3

per 7
un numero con più di due cifre è divisibile per 7 se la differenza del numero ottenuto escludendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è 0, 7 o un multiplo di 7.
per es. 95676 è divisibile per 7 se lo è il numero 9567-2*6=9555; questo è divisibile per 7 se lo è il numero 955-2*5=945; questo è divisibile per 7 se lo è 94-2*5=84 che è divisibile per 7 dunque lo è anche il numero 95676.

Criteri di divisibilità

Per 8

un numero è divisibile per 8 se termina con tre zeri o se è divisibile per 8 il numero formato dalle sue ultime 3 cifre

Per 9

un numero è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre è 9 o un multiplo di 9

Per 10

un numero è divisibile per 10 se la sua ultima cifra è 0

Criteri di divisibilità

Per 11
un numero è divisibile per 11 se la differenza (presa in valore assoluto), fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari, è 0, 11 o un multiplo di 11
per es. 625834 è divisibile per 11 in quanto (2+8+4)-(6+5+3)=14-14=0

Per 12
un numero è divisibile per 12 se è contemporaneamente divisibile per 3 e per 4

Per 13
un numero con più di due cifre è divisibile per 13 se la somma del quadruplo della cifra delle unità con il numero formato dalle rimanenti cifre è 0, 13 o un multiplo di 13
per es. 7306 è divisibile per 13 se lo è il numero 730+4*6=754; questo è divisibile per 13 in quanto 75+4*4=91 è multiplo di 13 (13*7=91)

Criteri di divisibilità

Per 17

un numero con più di due cifre è divisibile per 17 se la differenza (presa in valore assoluto), fra il numero ottenuto eliminando la cifra delle unità e il quintuplo della cifra delle unità è 0, 17 o un multiplo di 17

per es. 2584 è divisibile per 17 se lo è il numero 258-5*4=238; questo è divisibile per 17 se lo è il numero 23-5*8=17

Per 25

un numero è divisibile per 25 se il numero formato dalle ultime 2 cifre è divisibile per 25, cioè 00, 25, 50, 75

Per 100

un numero è divisibile per 100 se le ultime due cifre sono 00

2007–2013

Criteri di divisibilità

18) Qual è il più piccolo intero di cinque cifre divisibile per 3 e per 13?
(A) 10011 **(B)** 10020 **(C)** 10036 **(D)** 10062 **(E)** nessuno dei precedenti.

18) La risposta è **(E)**.
Il numero 10062 è, per verifica diretta, l'unico fra i numeri elencati divisibile sia per 3 che per 13. Non è però il piú piccolo numero di 5 cifre con questa proprietà, in quanto anche $10062 - 3 \cdot 13 = 10023$ la possiede.

24) La risposta è **(B)**.

Ricordiamo che un numero è divisibile per 11 quando la differenza fra la somma delle cifre di posto pari e quelle di posto dispari è 0, 11 o un suo multiplo. Di conseguenza il numero cercato è formato da cifre 3 e 5 alternate. Se infatti nel numero richiesto vi fossero due cifre uguali vicine (una di posto pari e l'altra di posto dispari) sarebbe possibile ottenere da esso un altro numero con le caratteristiche richieste, ma con meno cifre sopprimendo tale coppia di cifre uguali. Sia $2n+1$ il numero di cifre cercato. Si hanno allora due casi:

- La cifra delle unità è 5. In questo caso nel numero compare $n+1$ volte la cifra 5 e n volte la cifra 3. Quindi $5(n+1)-3n = 2n+5$ deve valere 0 o un multiplo di 11. Per minimizzare n, devo scegliere il multiplo più piccolo che fornisce una soluzione n intera, cioè 11 stesso e si ottiene $n = 3$. In questo caso il numero risultante ha 7 cifre, ed è 5353535.
- La cifra delle unità è 3. In questo caso nel numero compare $n+1$ volte la cifra 3 e n volte la cifra 5. Quindi $5n-3(n+1) = 2n-3$ deve valere 0 o un multiplo di 11. Per minimizzare n, devo scegliere il multiplo più piccolo che fornisce una soluzione n intera, cioè di nuovo 11 stesso e si ottiene $n = 7$. In questo caso il numero risultante ha 15 cifre, e non è quindi quello richiesto.

Le progressioni

Progressione aritmetica

Progressione geometrica

Progressione aritmetica

- Si dice **progressione aritmetica** (o per differenza) una successione di numeri tale che sia costante la differenza fra un qualunque numero e il suo predecessore.

Esempio

- 5, 8, 11, 14, ...
- 8 - 5 = 3
- 11 - 8 = 3
- 14 - 11 = 3

La ragione

- I termini successivi di una progressione si possono indicare così (lettere minuscole con indice):
  a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n , ...
- **a_1** è il primo termine della progressione.
- La differenza costante, che nell'esempio numerico è 3, si chiama **ragione** della progressione aritmetica e si indica con **d**.

- $a_n = a_{n-1} + d$
- Formula per calcolare il **termine n-esimo** di una progressione aritmetica conoscendo il **primo termine** e la **ragione** :
  - $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Progressione aritmetica finita

- Se di una progressione aritmetica consideriamo soltanto un numero finito di termini consecutivi
- (ad esempio, soltanto i primi n termini), parleremo di **progressione aritmetica finita**

La somma in una progressione aritmetica

- $S = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$
- $S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots$
- $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$ e così per ogni coppia (le coppie sono n/2)
- **$S = (a_1 + a_n)\, n/2$**
- $S = n(a_1 + a_1 + (n - 1)d)/2$

Progressione geometrica

- Si dice **progressione geometrica** una successione di numeri tale che sia costante il rapporto fra un qualunque numero e il suo predecessore.

- Il **rapporto costante** tra ogni termine (escludendo, ovviamente, il primo) e il precedente si dice "**ragione**" della progressione, e viene di solito indicato col simbolo **q**

Esempio

- 2, 10, 50, 250, 1250
- 10/2 = 5
- 50/10 = 5
- 250/50 = 5
- 1250/250 = 5

2007-2013

La ragione

- I termini successivi di una progressione si possono indicare così (lettere minuscole con indice):
  a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n , ...
- a_1 è il primo termine della progressione.
- $a_n = a_{n-1}\ q^{\,n}$ q= ragione
- $q = a_n\ /\ a_{n-1}$

- $a_n = a_{n-1}\ q$

- $a_{n-1} = a_{n-2}\ q$

- $a_n = a_{n-1}\ q = a_{n-2}\ q\ q = a_{n-2}\ q^2$

- $\mathbf{a_n = a_1\ q^{n-1}}$

Progressione geometrica finita

- Se di una progressione geometrica consideriamo soltanto un numero finito di termini consecutivi
- (ad esempio, soltanto i primi n termini), parleremo di **progressione geometrica finita**

La somma in una progressione geometrica

- $S = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$
- $S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots\ldots + a_1 q^{n-1}$
- $S = a_1 (1 + q + q^2 + \ldots\ldots\ldots + q^{n-1})$
- $1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$
- $(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = (1 - q^n)/(1 - q)$
- **$S = a_1 (1 - q^n)/(1 - q)$**