Probabilità e Statistica

Corso PON "Competenze per lo sviluppo"

Liceo Scientifico

"Bonaventura Rescigno"

Baronissi

Ing. Ivano Coccorullo – Prof.ssa Angela D'Ambrosio

La media aritmetica

Statistica

Si dice **media aritmetica semplice** il rapporto tra la somma di tutti i valori x_i assunti dalla variabile X e il numero totale delle unità prese in considerazione:

$$M(X) = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

25

Si dice **media aritmetica ponderata** il rapporto tra la somma dei prodotti di ciascun valore x_i della variabile X per la rispettiva frequenza a_i e la somma totale delle frequenze:

$$M(X) = \overline{x} = \frac{x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot a_i}{\sum_{i=1}^{k} a_i}. \tag{26}$$

Per ogni valore x_i della variabile statistica X si dice **scarto dalla media** $\overline{x}$ lo scostamento del singolo valore da quello medio:

$$s_i = x_i - \overline{x}. \tag{27}$$

Si dice **varianza** di una distribuzione statistica, e la si indica con VAR o σ^2, la media aritmetica dei quadrati degli scarti dalla media:

$$\mathrm{VAR}(X) = \sigma^2(X) = M((X - \overline{x})^2) = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot a_i}{\sum_{i=1}^{k} a_i}. \tag{28}$$

Si dice **scarto quadratico medio**, e lo si indica con σ, la radice quadrata della varianza:

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{VAR}(X)}. \tag{29}$$

Varianza e Covarianza

Si dice **covarianza** di due distribuzioni statistiche, e la si indica con COVAR, la media aritmetica dei prodotti degli scarti dalle rispettive medie dei valori associati, cioè dei valori aventi lo stesso indice:

$$\mathrm{COVAR}(X;Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{n} \qquad (30)$$

Teoria delle probabilità

La **probabilità** è un numero, compreso tra 0 e 1, che indica il grado di possibilità che un certo evento si verifichi: esso è 1 se l’evento è certo, 0 se è impossibile.

Laplace propose quella che è detta la definizione classica di probabilità:

“La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili,

purché questi siano egualmente possibili”

Dalla concezione classica alla frequentista

Dalle critiche alla definizione classica di probabilità, anche in conseguenza dei progressi delle scienze sperimentali, si sviluppò una nuova concezione della probabilità: la ***concezione frequentista***, che si può applicare quando si possono eseguire tante prove quante si vogliono sull'evento, oppure sono disponibili tavole con i risultati di rilevazioni statistiche relative a un certo fenomeno (ad esempio, le tavole di mortalità e di sopravvivenza).

Secondo la concezione frequentista, per conoscere la probabilità di un evento si deve ricorrere **all'esperimento**.
È importante rilevare che per un frequentista non ha senso calcolare la probabilità di una singola prova, perché non si può prevedere il risultato di un singolo esperimento, mentre in una gran successione di prove si riscontra una sorprendente regolarità.

La concezione frequentista è basata sulla definizione di ***frequenza relativa*** di un evento.

DEFINIZIONE

*Si definisce **frequenza relativa** di un evento in n prove effettuate nelle stesse condizioni, il rapporto fra il numero k delle prove nelle quali l'evento si è verificato e il numero n delle prove effettuate:*

$$f(A)=k/n.$$

La frequenza dipende non solo da n, numero delle prove fatte, ma, per uno stesso n, può variare al variare del gruppo delle prove.

***Legge empirica del caso**: in una serie di prove, ripetute un gran numero di volte, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza "tende" ad assumere valori prossimi alla probabilità dell'evento e, generalmente, l'approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove eseguite.*

Bisogna applicare con attenzione tale legge, in quanto afferma che se si eseguono numerose prove su un evento, la frequenza ordinariamente si discosta di poco dalla probabilità, ma ciò non esclude che qualche volta, anche se raramente, la frequenza, che è un valore sperimentale, assuma valori non attesi.

II Parte

Laboratorio con l'utilizzo del foglio elettronico.

Descrizione Attività di Laboratorio

ESPERIENZA 1

Lancia due dadi e, ad ogni lancio, fai la somma dei due risultati ottenuti.
Calcola la frequenza relativa e quella assoluta.

ESPERIENZA 2

Lancia tre dadi e, ad ogni lancio, elimina il dado col punteggio maggiore annotando la somma dei due dadi rimasti (se quelli col punteggio maggiore sono due, eliminarne uno qualsiasi).
Calcola la frequenza relativa e quella assoluta.

OSSERVAZIONI

I risultati sono gli stessi che nel lancio di due dadi?

Descrizione Attività di Laboratorio

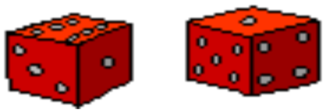
ESPERIENZA 3

Lancia più volte una moneta, ad ogni lancio calcola la frequenza relativa all'evento "TESTA" e all'evento "CROCE". Alla fine verifica *la legge empirica del caso* andando a graficare con un istogramma come varia la frequenza relativa dell'evento "CROCE" all'aumentare del numero di lanci.

SVOLGIMENTO ESPERIENZA 1

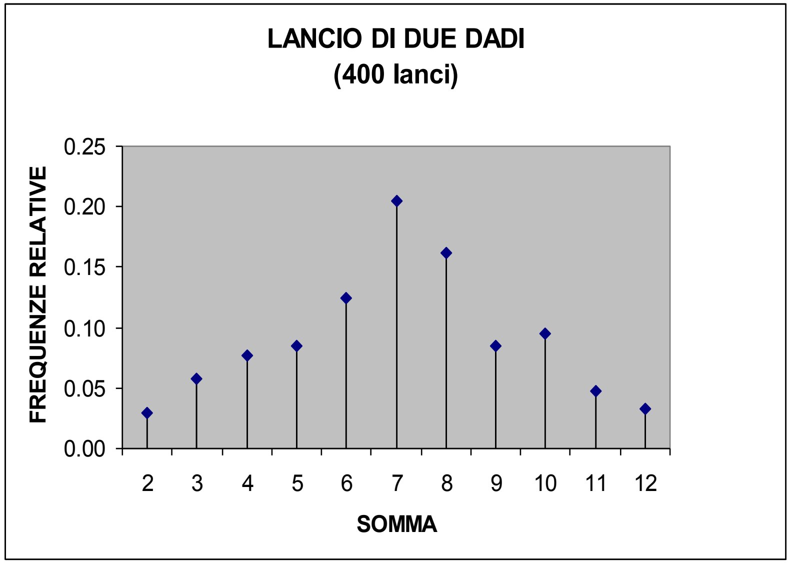
Utilizzando un foglio elettronico simuliamo il lancio di due dadi.
Per ogni lancio calcoliamo la somma dei due risultati.
Infine calcoliamo la frequenza relativa e quella assoluta, per poi graficarle con gli istogrammi.

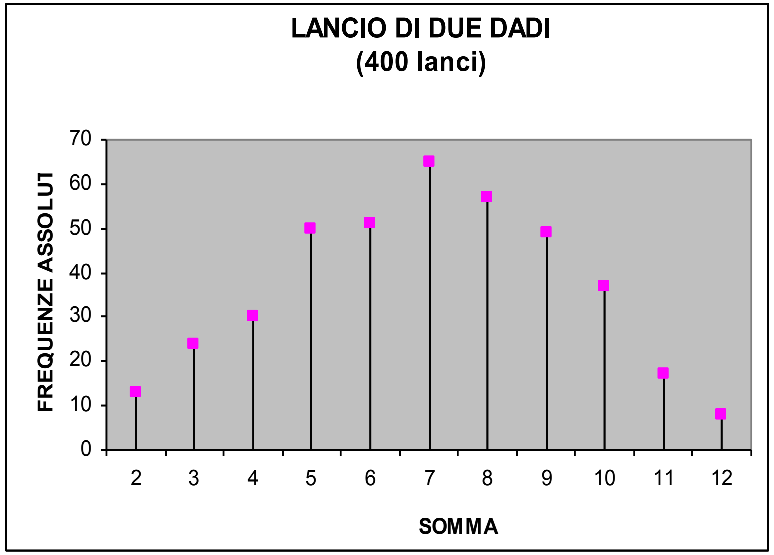
Mostriamo l'esperienza:



Analizziamo gli istogrammi ottenuti

Dall'esame del grafico possiamo dedurre che i casi centrali sono i più frequenti. Da cosa dipende?





Osservazioni Esperienza 1

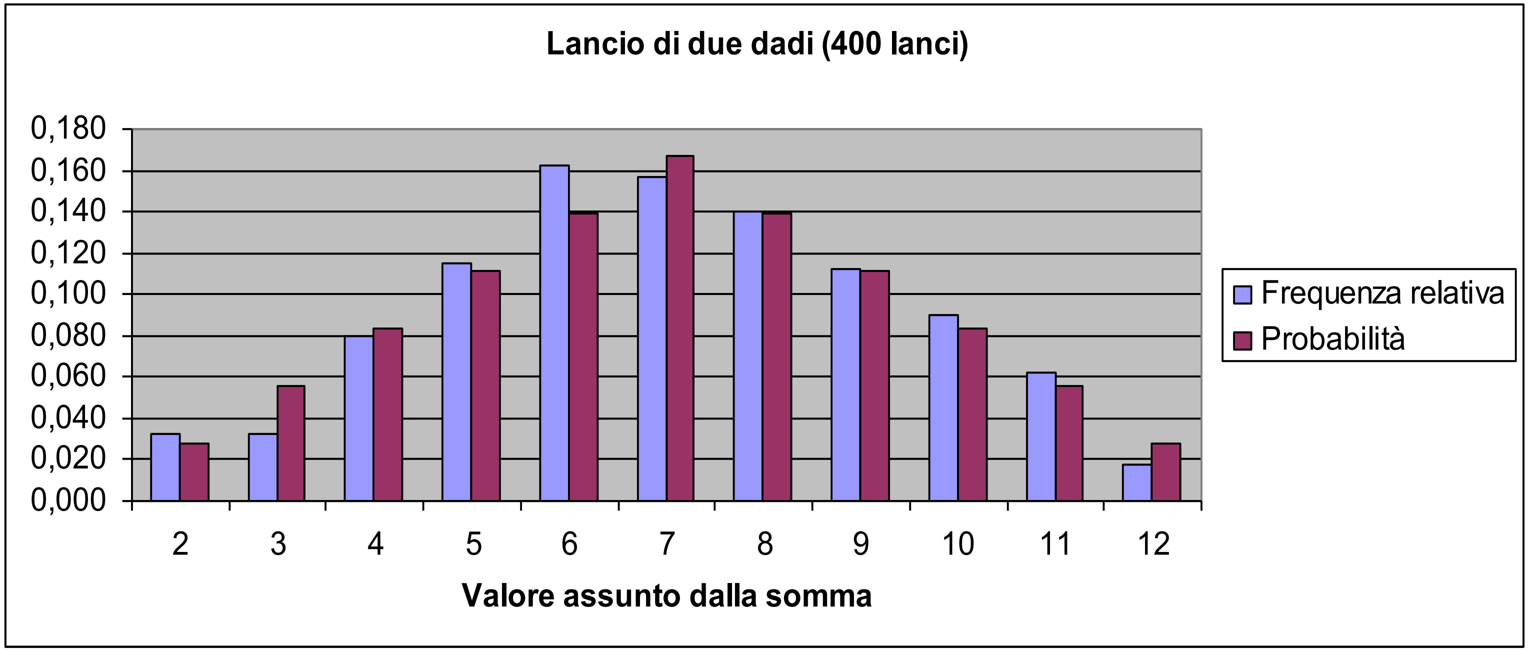
Andiamo a valutare le probabilità dei diversi eventi possibili.

I casi possibili nel lancio di due dadi sono tutte le coppie che si possono ottenere associando una faccia del primo dado con una qualunque del secondo dado $6 \cdot 6 = 36$.

Non tutti i risultati, però, hanno la stessa probabilità: infatti, ad esempio, il numero 6 si può ottenere in più modi che non il numero 3.

EVENTO	Modalità di presentazione	Numero casi possibili	Probabilità
uscita del 2	1+1	1	1/36
uscita del 3	1+2 2+1	2	2/36
uscita del 4	1+3 2+2 3+1	3	3/36
uscita del 5	1+4 2+3 3+2 4+1	4	4/36
uscita del 6	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	5	5/36
uscita del 7	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	6	6/36
uscita del 8	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	5	5/36
uscita del 9	3+6 4+5 5+4 6+3	4	4/36
uscita del 10	4+6 5+5 6+4	3	3/36
uscita del 11	5+6 6+5	2	2/36
uscita del 12	6+6	1	1/36
Totale		36	1

Analizziamo la situazione …



Riflettiamo…

• Perché il grafico sperimentale non risulta perfettamente simmetrico come ci si aspetterebbe dalla valutazione di probabilità?

• Il grafico avrebbe avuto un andamento più vicino alle previsioni se il numero di lanci fosse stato maggiore?

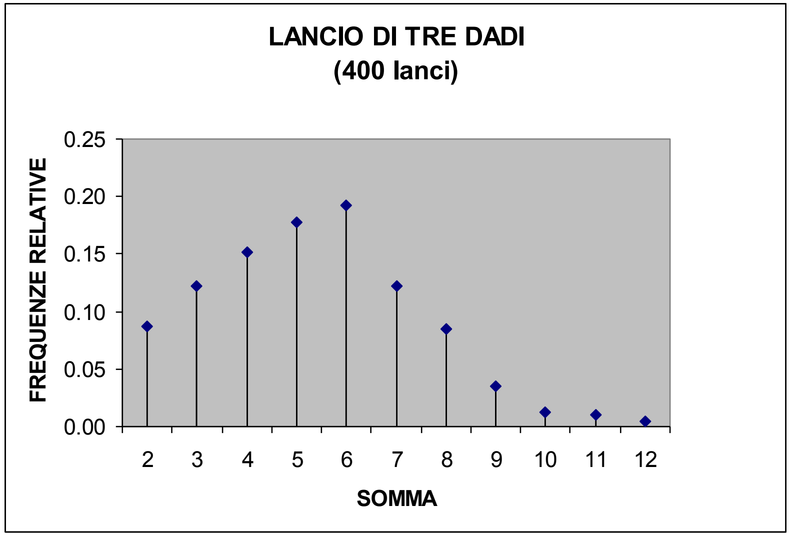
SVOLGIMENTO ESPERIENZA 2

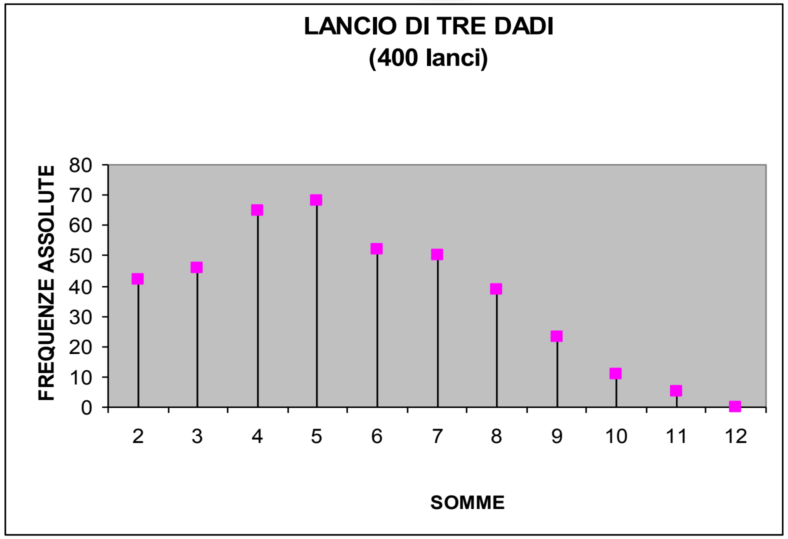
Utilizzando un foglio elettronico simuliamo il lancio di tre dadi.
Per ogni lancio calcoliamo la somma dei due risultati.
Infine calcoliamo la frequenza relativa e quella assoluta, per poi graficarle con gli isogrammi.

Mostriamo l’esperienza:

Analizziamo gli istogrammi ottenuti

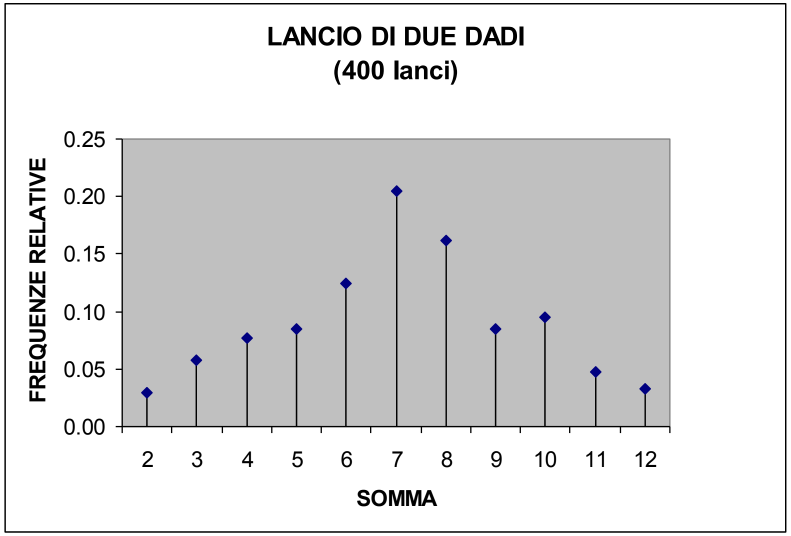
Notiamo il diverso andamento ottenuto in questo esperimento rispetto a quello relativo al lancio di due dadi.

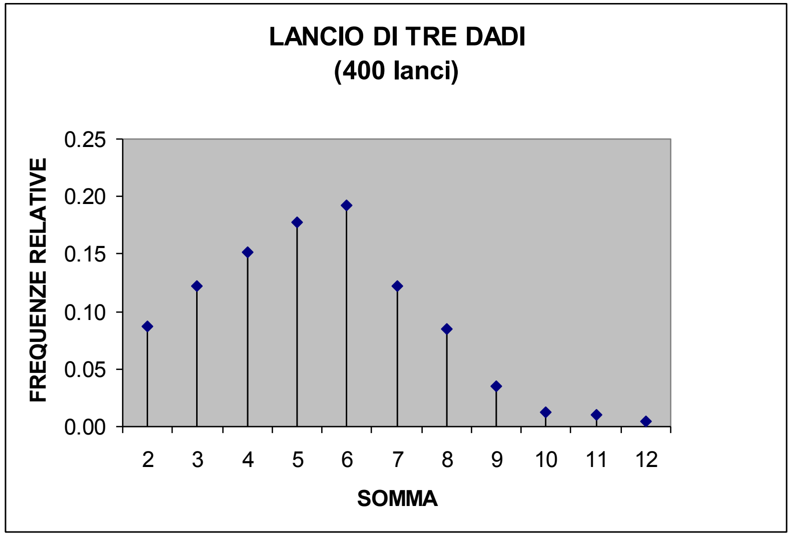




OSSERVAZIONI ESPERIENZA 2

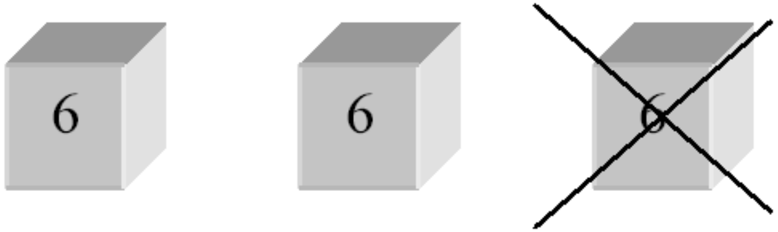
Anche se gli eventi sono sempre l'uscita dei numeri da 2 a 12, il fatto di aver eliminato l'esito del terzo dado, quello col punteggio maggiore, non può essere ignorato.
Infatti vediamo, confrontando i grafici delle frequenze relative, che nel secondo caso c'è una traslazione a sinistra delle frequenze relative maggiori.



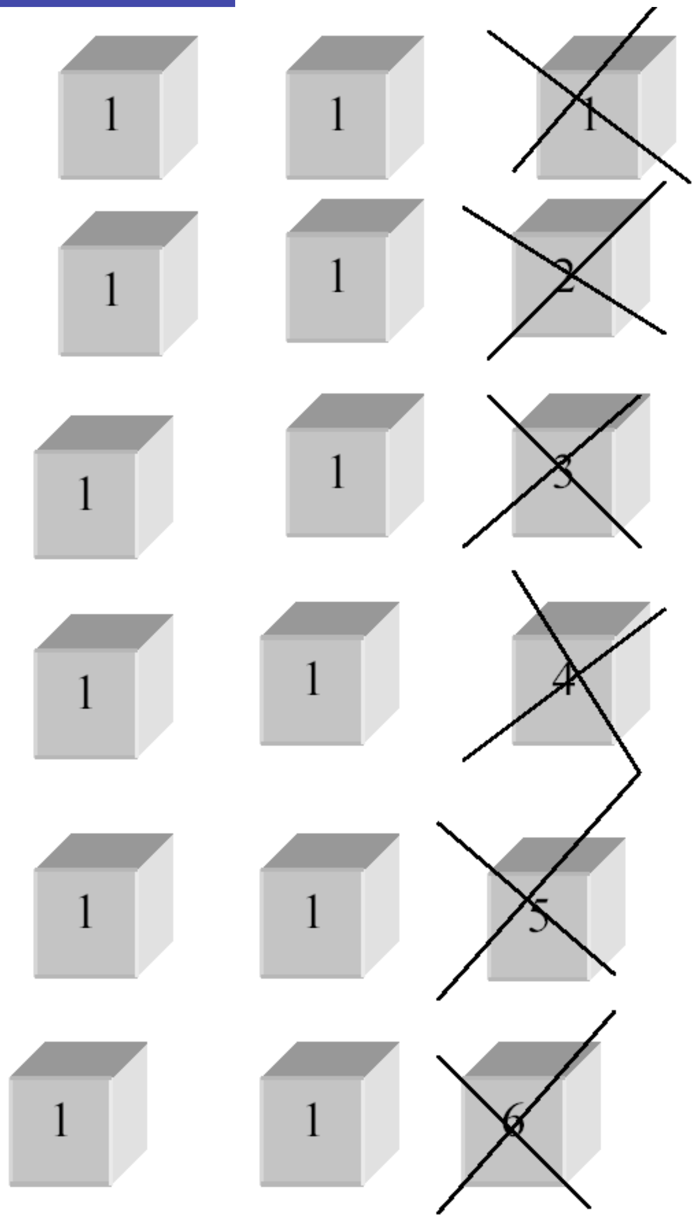


Andiamo a calcolare i diversi casi possibili per ogni evento.
Per esempio l'evento E2 : "uscita del 2" e l'evento E12: "uscita del 12" non hanno in questo caso la stessa probabilità.

Infatti, l' evento E12 si realizza in un solo modo:



Mentre l`evento E2 si realizza in 16 modi:



in tre modi

in tre modi

in tre modi

in tre modi

in tre modi

A questo punto andiamo a calcolare la probabilità dei diversi eventi, dividendoli in gruppi perché il calcolo seppure semplice è un pò laborioso, e si ottiene:

P(uscita del 2) = $16/6^3$

P(uscita del 3) = $27/6^3$

P(uscita del 4) = $34/6^3$

P(uscita del 5) = $36/6^3$

P(uscita del 6) = $34/6^3$

P(uscita del 7) = $27/6^3$

P(uscita del 8) = $19/6^3$

P(uscita del 9) = $12/6^3$

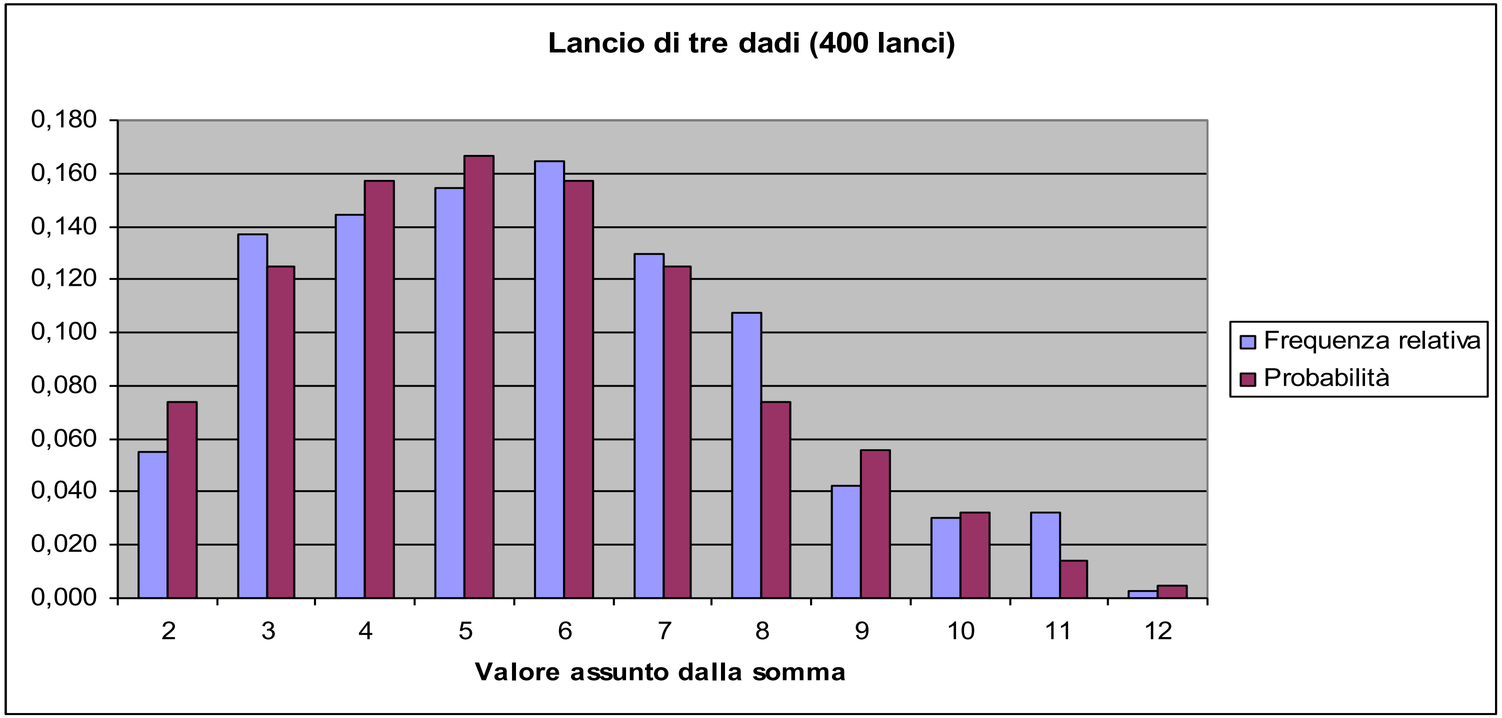
P(uscita del 10) = $7/6^3$

P(uscita del 11) = $3/6^3$

P(uscita del 12) = $1/6^3$

Le valutazioni teoriche si accordano con i risultati ottenuti ?

Analizziamo la situazione …



LANCIO DI UNA MONETA

Presentiamo un esempio in cui, grazie all'utilizzo del foglio elettronico, verificheremo *la legge empirica del caso* o *legge dei grandi numeri.*

In una serie di prove, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza tende ad assumere valori prossimi alla probabilità dell'evento, e l'approssimazione è tanto migliore quanto più grande è il numero delle prove eseguite.