Probabilità e Statistica

Corso PON "Competenze per lo sviluppo"

Liceo Scientifico

"Bonaventura Rescigno"

Baronissi

Ing. Ivano Coccorullo – Prof.ssa Angela D'Ambrosio

Teoria delle probabilità

Si è soliti far risalire la nascita della teoria della probabilità al tentativo di dare risposta agli interrogativi che i **giocatori d'azzardo** avevano per assicurarsi la vincita nel gioco. Un aneddoto racconta che alcuni giocatori chiesero a **Galileo** perché gettando tre dadi la somma dei numeri è più spesso 10 che 9.

Nel 1654 un giocatore d'azzardo, il Cavaliere di Merè, chiese al matematico francese **Blaise Pascal**, quante volte sarebbe uscito un doppio sei gettando 24 volte una coppia di dadi.

La soluzione di questi e altri problemi diede origine al **calcolo delle probabilità**.

Teoria delle probabilità

Il primo che fece di questo argomento un vero e proprio ramo di ricerca matematica fu lo svizzero **Giacomo Bernoulli** (1713), mentre la prima sistemazione rigorosa e moderna della nuova scienza fu opera del francese **Pierre-Simon de Laplace** (1812) nella sua famosa Teoria analitica della probabilità.

Al giorno d'oggi, le leggi matematiche della probabilità sono diventate un fattore importante nella nostra vita: il **politico** le usa per progettare la sua campagna elettorale usando i sondaggi di opinione con le relative rielaborazioni, i **genetisti** la usano per prevedere la frequenza relativa con cui varie caratteristiche ricorrono in gruppi di individui, gli esperti in **telecomunicazioni** se ne servono per calcolare la densità del traffico telefonico ecc.

Eventi certi, impossibili e casuali

Nella scienza e nella tecnologia è fondamentale il principio secondo il quale ogni volta che si realizza un insieme di **condizioni C** si richiede che si presenti **l'evento A**.

Un evento che si presenta **senza alcuna incertezza**, per ogni realizzazione dell'insieme di **condizioni C**, si dice **certo**.

Un evento che, data la realizzazione di un insieme di **condizioni C**, non si realizza mai, si dice **impossibile**.

Un evento A che, data la realizzazione di un insieme di **condizioni C**, può accadere oppure no, si dice **casuale** o **aleatorio**.

Esempi di eventi casuali

- ✓ il numero delle chiamate di servizio di un'ambulanza non è prevedibile con esattezza. Tale numero è soggetto a fluttuazioni importanti e aleatorie;
- ✓ il risultato «tre volte testa» nel triplice lancio di una moneta è aleatorio;
- ✓ nel tiro a segno si osserva una dispersione di proiettili. Non è possibile indicare a priori lo scarto tra il punto d'incontro del proiettile e il centro dell'obiettivo: tale scarto è una grandezza aleatoria;
- ✓ estrarre una pallina rossa da un'urna contenente tredici palline bianche e
- ✓ quattro rosse, è un evento aleatorio.

Eventi casuali

Per alcuni fenomeni di questo tipo si può non solo affermare semplicemente la casualità dell'evento A, ma anche fornire una stima approssimativa della possibilità che esso si verifichi.

SCOPO DELLA PROBABILITA'

Spazio delle probabilità ed Eventi

Con il termine **prova** (o **tentativo**) s'intende una singola esecuzione di un ben determinato esperimento. Da questa prova si ottiene un singolo risultato elementare (o eventualità o **campione**)

Si chiama **spazio delle probabilità**, associato a un dato esperimento, l'insieme S di tutti i possibili risultati.

Si chiama **evento** un sottoinsieme A dello spazio S, cioè un insieme di risultati possibili.

Un evento si dice:

- ✓ elementare, se è un insieme con un solo elemento;
- ✓ certo, se coincide con S;
- ✓ impossibile, se è l'insieme vuoto.

Linguaggio della Probabilità

Diremo che in una prova si **verifica** (o si realizza) l'evento A, se il risultato a della prova appartiene ad A. In caso opposto si dice che in quella prova non si verifica l'evento.

Un risultato che verifica un evento si dice **favorevole** all'evento.

I risultati che, verificandosi in una prova, realizzano l'evento A, si chiamano **modalità dell'evento A**.

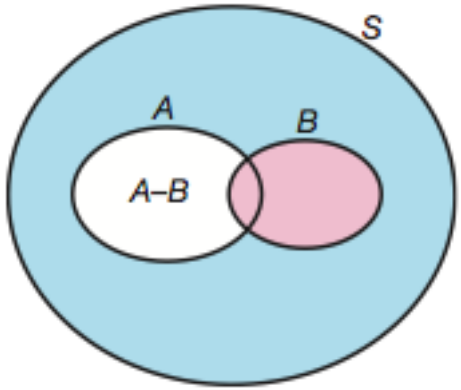
Dal momento che gli eventi sono insiemi, ogni affermazione relativa a eventi può essere espressa con il **linguaggio degli insiemi**, e viceversa.

In particolare, avremo un'algebra degli eventi corrispondente all'algebra degli insiemi. Usando le operazioni tra insiemi su eventi di S si possono ottenere nuovi eventi di S.

Due eventi…

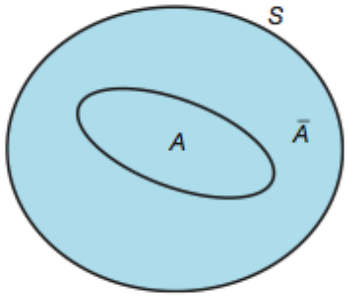
Così, se **A e B** sono due **eventi** (appartenenti a una medesima prova), si chiama:

- ✓ **evento somma** di A e B, e si indica con A∪B, l'evento C che risulta dal verificarsi di **almeno** ı
- ✓ **evento prodotto** di A , l'evento C che risulta dal verificarsi di **entramb**
- ✓ **evento differenza** tra - B, l'evento che consiste nel fatto che accada l' ɔ B.



Linguaggio della Probabilità

due eventi A e $\bar{A}$ si dicono opposti (o complementari, o contrari) quando uno di essi non si verifica se e solo se si verifica l'altro.



$$\bar{S} = \emptyset \qquad \bar{\emptyset} = S \qquad A \cup \bar{A} = S \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

due eventi A e B si dicono **incompatibili** se sono disgiunti, cioè se risulta $A \cap B = \emptyset$. In altre parole, A e B sono incompatibili se non possono verificarsi simultaneamente;
se risulta $A \subseteq B$, si dice che A **implica** B.

Esempio

E` dato l'esperimento «si getti un **dado** e si osservi il numero che si presenta».

Lo spazio delle probabilità è: **S={1,2,3,4,5,6}**.

Sia A l'evento «si presenta un numero **pari**», B l'evento «si presenta un numero **dispari**», C l'evento «si presenta un numero **primo**», D l'evento «si presenta un numero **minore di 7**» ed E l'evento «si presenta un numero **divisibile per 7**». Si ha:

A={2,4,6} **B**={1,3,5} **C**={2,3,5} **D**=S **E**=∅

L'evento D è **certo**, l'evento E è **impossibile**, gli eventi A, B e C hanno tre **modalità** ciascuno. Risulta inoltre:

$A \cup C$={2,3,4,5,6} che è l'evento «si presenta un numero pari o primo»;

$B \cap C$={3, 5}; che è l'evento «si presenta un numero dispari primo»;

$\overline{C}$= {1,4,6}; che è l'evento che «non si presenta un numero primo».

Si noti che A e B sono **incompatibili**; in altri termini, un numero pari e un numero dispari non possono presentarsi simultaneamente.

Esempio

2 Nello stesso esperimento dell'esercizio precedente, sia A l'evento «si presenti il numero 6», B l'evento «si presenta il numero 3», C l'evento «si presenta un numero pari», D l'evento «si presenta un numero multiplo di 3».

Abbiamo:

$$A = \{6\} \qquad B = \{3\} \qquad C = \{2, 4, 6\} \qquad D = \{3, 6\}$$

Gli eventi A e B sono elementari e risulta:

$$A \subseteq C \qquad A \subseteq D \qquad B \subseteq D \qquad A \cup B = D \qquad C \cap D = A$$

Esempio

3 È dato l'esperimento «si lanci tre volte una moneta e si osservino le sequenza di teste (T) e croci (C) che si presentano».
Lo spazio S è dato da:

$$S = \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC\}$$

Sia A l'evento «due o più teste si presentano consecutivamente» e B l'evento «tutti i lanci diano lo stesso risultato», cioè:

$$A = \{RRR, RRC, CTT\} \qquad B = \{TTT, CCC\}$$

Risulta $A \cap B = \{TTT\}$, che è l'evento elementare «si presenta per tre volte testa». L'evento «si presentano 5 teste» è l'insieme vuoto, cioè l'evento è impossibile.

4 È dato l'esperimento «si lanci due volte una moneta».

Dati gli eventi $A = \{TC, CT, TT\}$ e $B = \{TC, CC\}$, risulta:

$$A \cup B = \{TC, CT, TT, CC\} = S \qquad A \cap B = \{TC\}$$

$$\overline{A} = \{CC\} \qquad A - B = \{CT, TT\}$$

Approccio Classico

La **probabilità** è un numero, compreso tra 0 e 1, che indica il grado di possibilità che un certo evento si verifichi: esso è 1 se l'evento è certo, 0 se è impossibile.

Laplace propose quella che è detta la definizione classica di probabilità:

"La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili,

purché questi siano egualmente possibili"

Esempio

ESEMPI

1 Un'urna contiene soltanto 7 palline bianche e 5 rosse, tutte uguali e non distinguibili che per il colore. Calcolare le probabilità che, estraendo a caso una sola pallina dall'urna, si verifichino i seguenti eventi:

a) E_1: «pallina bianca»;
b) E_2: «pallina rossa»;
c) E_3: «pallina bianca o rossa».

In base alla definizione di probabilità, si ha:

a) la probabilità che la pallina sia bianca è: $P(E_1) = \frac{7}{7+5} = \frac{7}{12}$;

b) la probabilità che la pallina sia rossa è: $P(E_2) = \frac{5}{7+5} = \frac{5}{12}$;

c) la probabilità che la pallina sia bianca o rossa, indifferentemente, è: $P(E_3) = \frac{7+5}{7+5} = 1$. Perciò l'evento E_3 è certo.

Esempio

2 Calcolare la probabilità che, lanciando una volta due dadi regolari, la somma dei numeri presentati dalle facce superiori sia minore di 5.

Il numero dei casi possibili in un lancio è $n = 6^2 = 36$, e sono dati nella seguente tabella.

$$(1;\,1),\ (1;\,2),\ (1;\,3),\ (1;\,4),\ (1;\,5),\ (1;\,6)$$
$$(2;\,1),\ (2;\,2),\ (2;\,3),\ (2;\,4),\ (2;\,5),\ (2;\,6)$$
$$(3;\,1),\ (3;\,2),\ (3;\,3),\ (3;\,4),\ (3;\,5),\ (3;\,6)$$
$$(4;\,1),\ (4;\,2),\ (4;\,3),\ (4;\,4),\ (4;\,5),\ (4;\,6)$$
$$(5;\,1),\ (5;\,2),\ (5;\,3),\ (5;\,4),\ (5;\,5),\ (5;\,6)$$
$$(6;\,1),\ (6;\,2),\ (6;\,3),\ (6;\,4),\ (6;\,5),\ (6;\,6)$$

Il numero dei casi favorevoli all'evento è $m = 6$, e precisamente:

$$(1;\,1)\ \text{somma} = 2 \qquad (1;\,2)\ \text{somma} = 3$$
$$(2;\,1)\ \text{somma} = 3$$
$$(1;\,3)\ \text{somma} = 4 \qquad (2;\,2)\ \text{somma} = 4$$
$$(3;\,1)\ \text{somma} = 4$$

La probabilità cercata è dunque:

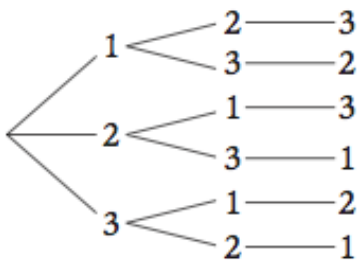
$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Esempio

3 Un'urna contiene tre gettoni numerati con 1, 2, 3. Li si estrae a caso uno dopo l'altro dall'urna e si studia il problema delle coincidenze, cioè quando il numero del gettone coincide con il numero d'ordine della sua estrazione.

Per esempio, se si estraggono, nell'ordine 1, 3, 2, vi è una sola coincidenza (1 è al suo posto, il primo); se, invece, si estraggono 3, 1, 2, non vi è nessuna coincidenza.

Per risolvere il problema, costruiamo il grafico ad albero di tutti i 6 casi possibili.



Ordine di estrazione			*Numero delle coincidenze*
1	2	3	3
1	3	2	1
2	1	3	1
2	3	1	0
3	1	2	0
3	2	1	1

Dal grafico deduciamo la seguente tabella.

Numero delle coincidenze	0	1	2	3
Numero dei casi	2	3	0	1

Con facilità si possono calcolare le probabilità.

La probabilità di avere una coincidenza è dunque $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; le probabilità di avere due coincidenze è $\frac{0}{6} = 0$; ...

Proprietà additiva della probabilità

Teorema 1

Se A e B sono due eventi **incompatibili**, si ha:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{1}$$

Dimostrazione

Siano $P(A) = \dfrac{m_1}{n}$ e $P(B) = \dfrac{m_2}{n}$.

Poiché, per ipotesi, gli eventi A e B sono incompatibili, gli m_1 risultati favorevoli ad A sono diversi dagli m_2 risultati favorevoli a B.
Vi sono dunque $m_1 + m_2$ risultati favorevoli a che si verifichi uno degli eventi A e B, cioè favorevoli a che si verifichi l'evento $A \cup B$.
Pertanto:

$$P(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

Proprietà additiva della probabilità

Teorema 2

Se A e B sono due eventi **qualsiasi**, risulta:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dimostrazione

Scriviamo gli eventi $A \cup B$ e B come somma di eventi incompatibili *(fig. 3)*:

$$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B) \qquad B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

e applichiamo il teorema 1:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \quad \text{e} \quad P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

Eliminando $P(\overline{A} \cap B)$ tra queste due eguaglianze si ottiene la relazione cercata:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

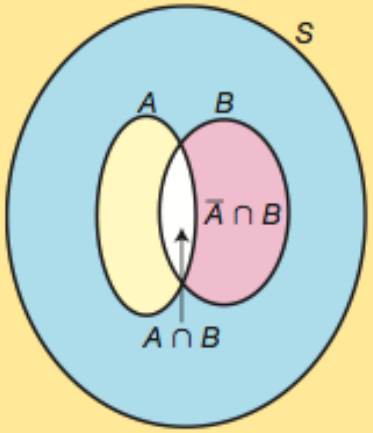


figura 3

Dalla concezione classica alla frequentista

Dalle critiche alla definizione classica di probabilità, anche in conseguenza dei progressi delle scienze sperimentali, si sviluppò una nuova concezione della probabilità: la ***concezione frequentista***, che si può applicare quando si possono eseguire tante prove quante si vogliono sull'evento, oppure sono disponibili tavole con i risultati di rilevazioni statistiche relative a un certo fenomeno (ad esempio, le tavole di mortalità e di sopravvivenza).

Secondo la concezione frequentista, per conoscere la probabilità di un evento si deve ricorrere **all'esperimento**.
È importante rilevare che per un frequentista non ha senso calcolare la probabilità di una singola prova, perché non si può prevedere il risultato di un singolo esperimento, mentre in una gran successione di prove si riscontra una sorprendente regolarità.

La concezione frequentista è basata sulla definizione di ***frequenza relativa*** di un evento.

DEFINIZIONE

Si definisce ***frequenza relativa*** *di un evento in n prove effettuate nelle stesse condizioni, il rapporto fra il numero k delle prove nelle quali l'evento si è verificato e il numero n delle prove effettuate:*

$$f(A)=k/n.$$

La frequenza dipende non solo da *n*, numero delle prove fatte, ma, per uno stesso *n*, può variare al variare del gruppo delle prove.

***Legge empirica del caso**: in un grande numero di prove, la frequenza relativa di un evento aleatorio ordinariamente si scosta di poco dalla probabilità dell'evento, e l'approssimazione è, in generale, tanto maggiore quanto più grande è il numero delle prove ripetute.*

Bisogna applicare con attenzione tale legge, in quanto afferma che se si eseguono numerose prove su un evento, la frequenza ordinariamente si discosta di poco dalla probabilità, ma ciò non esclude che qualche volta, anche se raramente, la frequenza, che è un valore sperimentale, assuma valori non attesi.

II Parte

Laboratorio con l'utilizzo del foglio elettronico.

LANCIO DI UNA MONETA

Utilizzando il foglio elettronico, verificate *la legge empirica del caso* o *legge dei grandi numeri.*

In una serie di prove, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza tende ad assumere valori prossimi alla probabilità dell'evento, e l'approssimazione è tanto migliore quanto più grande è il numero delle prove eseguite.

Lancia una moneta 20 volte e calcola la frequenza relativa dell'evento "esce testa" e confrontala con il valore teorico.
Lancia una moneta 200 volte e calcola la frequenza relativa dell'evento "esce testa" e confrontala con il valore teorico.
Rifletti sui risultati.