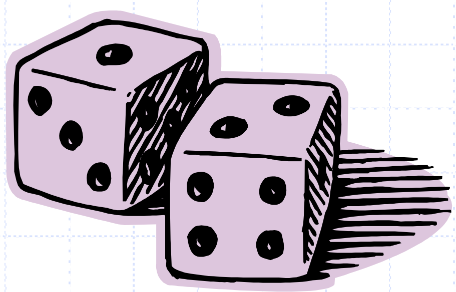
Calcolo delle probabilità

Approccio classico e frequentista alla probabilità

Prof.ssa Laura Pagnozzi
Prof. Ivano Coccorullo



Teoria delle probabilità

L'inizio della teoria delle probabilità, chiamata all'epoca la "dottrina della sorte", avviene nel XVII secolo, come risposta a due classi di problemi, legate rispettivamente ai giochi d'azzardo e alle assicurazioni.

- Nel primo caso si trattava di valutare la probabilità di vincere scommettendo sul verificarsi di un certo evento, ad esempio la faccia con su inciso il numero 6 nel lancio di un dado.
- Nel secondo caso si rendeva necessaria per le banche la stima della probabilità di morte di un individuo di una certa età, ovvero la probabilità che egli potesse sopravvivere un determinato numero di anni dalla stipula del contratto.

Teoria delle probabilità

La Teoria delle Probabilità è la disciplina matematica che si occupa di determinare quantitativamente il valore della probabilità nei vari casi.

I primi matematici che si occuparono di probabilità furono Gerolamo Cardano (1501-1576), Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665) e i fisici Galileo Galilei (1564-1642) e Christiaan Huygens (1629-1695). Questi studi erano legati ai giochi d'azzardo, e da queste poco nobili origini deriva il termine "aleatorio" (da alea, in latino dado) uno degli aggettivi più usati per definire il tipo di eventi oggetto del calcolo delle probabilità. Jacob Bernoulli (1655-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), Thomas Bayes (1702-1761), Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) posero le basi del moderno calcolo delle probabilità.

Teoria delle probabilità

La **probabilità** è un numero, compreso tra 0 e 1, che indica il grado di possibilità che un certo evento si verifichi: esso è 1 se l'evento è certo, 0 se è impossibile.

Laplace propose quella che è detta la definizione classica di probabilità:

"La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi siano egualmente possibili"

Per esempio, supponiamo di avere un dado "perfetto", per cui tutte le facce siano equiprobabili, allora l'evento "uscita di un numero dispari" (cioè 1, 3 o 5) ha probabilità

$$\frac{3}{6} = 0.50$$

Dalla concezione classica alla frequentista

Dalle critiche alla definizione classica di probabilità, anche in conseguenza dei progressi delle scienze sperimentali, si sviluppò una nuova concezione della probabilità: la ***concezione frequentista***, che si può applicare quando si possono eseguire tante prove quante si vogliono sull'evento, oppure sono disponibili tavole con i risultati di rilevazioni statistiche relative a un certo fenomeno (ad esempio, le tavole di mortalità e di sopravvivenza).

Secondo la concezione frequentista, per conoscere la probabilità di un evento si deve ricorrere all'esperimento.

È importante rilevare che per un frequentista non ha senso calcolare la probabilità di una singola prova, perché non si può prevedere il risultato di un singolo esperimento, mentre in una gran successione di prove si riscontra una sorprendente regolarità.

La concezione frequentista è basata sulla definizione di ***frequenza relativa*** di un evento.

DEFINIZIONE

Si definisce ***frequenza relativa*** *di un evento in n prove effettuate nelle stesse condizioni, il rapporto fra il numero k delle prove nelle quali l'evento si è verificato e il numero n delle prove effettuate:*

$$f(A)=k/n.$$

La frequenza dipende non solo da n, numero delle prove fatte, ma, per uno stesso n, può variare al variare del gruppo delle prove.

Esempio

Se si lancia 100 volte una moneta e si presenta testa 46 volte, effettuando altri 100 lanci, testa si può presentare un diverso numero di volte, ad esempio 52; ne segue che la frequenza per il primo gruppo di lanci è 46/100, per il secondo è 52/100.

Proprietà

- $0 \leq f \leq 1$

Osserviamo:
- se $f = 0$ $\neq>$ evento impossibile, ma solo che non si è verificato in quelle n prove;
- se $f = 1$ $\neq>$ evento certo, ma solo che si è sempre verificato in quelle n prove.

La frequenza varia al variare del gruppo delle prove eseguite, ma, fatto interessante, è stato costatato che se il numero di prove è sufficientemente alto, il rapporto k/n tende a stabilizzarsi.

Vale la pena di ricordare che la definizione di probabilità classica è stata formulata da **Laplace** nel 1800 e quella frequentista da **Von Mises** agli inizi del 1900.

Laplace definì *la probabilità di un evento come il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento considerato ed il numero dei casi possibili.*
La validità di questa definizione è legata alla clausola "casi ugualmente possibili" cioè tali che possano essere ugualmente incerti circa la loro esistenza: non sussistono ragioni per credere che se ne verificherà uno piuttosto che un altro.

Questa definizione permette una trattazione semplice, ma manca di generalizzazione in quanto considera "casi ugualmente possibili".

Von Mises sostenne che per probabilità del verificarsi di un certo evento in una successione casuale di eventi simili e ripetibili doveva intendersi *il limite al quale tende la frequenza relativa di quell'evento quando il numero dei termini della successione cresce indefinitamente,* ovviamente in casi in cui questo limite esiste.

Lim fn(A)=p(A), A evento e n numero di prove

Questa definizione ha un carattere di generalità maggiore della precedente, anche se non viene superata l'insufficienza logica. Infatti non possiamo affermare che il limite si presenterà con certezza, ma con grande probabilità.

Legge empirica del caso*: in una serie di prove, ripetute un gran numero di volte, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza "tende" ad assumere valori prossimi alla probabilità dell'evento e, generalmente, l'approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove eseguite.*

Bisogna applicare con attenzione tale legge, in quanto afferma che se si eseguono numerose prove su un evento, la frequenza ordinariamente si discosta di poco dalla probabilità, ma ciò non esclude che qualche volta, anche se raramente, la frequenza, che è un valore sperimentale, assuma valori non attesi.

Esempio

Nel gioco del lotto non è detto che, se, un numero non si è presentato da molte settimane, abbia maggiore probabilità di presentarsi, in quanto per ogni estrazione tale probabilità è sempre la stessa, indipendentemente dai numeri usciti nelle altre estrazioni.

La legge empirica del caso permette di formulare la seguente definizione frequentista di probabilità per eventi ripetibili.

La probabilità di un evento è la frequenza relativa in un numero di prove ritenuto "sufficientemente" elevato.

In generale non si può dire quante prove siano necessarie, perché il numero delle prove dipende dal fenomeno in esame. La frequenza, calcolata in un gran numero di prove, permette di prevedere i risultati di prove future eseguite nelle stesse condizioni.

Il campo di applicazione della concezione frequentista è molto vasto, in quanto la definizione può essere applicata a fenomeni dei quali si posseggano dati statistici riguardanti fenomeni passati che si sono verificati in condizioni analoghe.

Ad esempio, si potranno calcolare, per una data popolazione, la probabilità di morte o di sopravvivenza degli individui o la probabilità di nascita di maschi o di femmine. Si hanno pure importanti applicazioni nella medicina, nella psicologia, nell'economia, nella meccanica quantistica e, in generale, in tutte le scienze per le quali si possono utilizzare metodi statistici.

Vediamo due esempi che ne mettono in luce l'applicabilità.

ESEMPIO1:

Come si calcola la probabilità che esca 6 dal lancio di un dado di forma irregolare come riportato nella figura?

SOLUZIONE:

Non possiamo usare la definizione classica, poiché i casi non sono ugualmente possibili a causa dell'irregolarità del dado, non ci resta che provare un gran numero di lanci; contare quante volte esce 6 e dividere per il numero dei lanci; se ad esempio, su 1000 lanci, 6 sarà uscito 200 volte, allora la sua probabilità è 200/1000=1/5.

ESEMPIO2:

Una rana depone 2000 uova, dalle quali riescono a nascere solo 600 girini e di questi solo 50 raggiungono la fase adulta di rana. Si domanda:

1.Qual'è la probabilità (frequentista) che da un uovo deposto nasca un girino?

2.Qual'è la probabilità che un girino si trasformi in adulto?

3.Qual'è la probabilità che da un uovo si abbia, dopo il processo di crescita del girino, una rana?

4.Perchè certi animali ovipari depongono un numero enorme di uova?

SOLUZIONE:

1.Un girino nasce con una probabilità di 600/2000=3/10.

2.Un girino si trasforma in adulto con una probabilità di 50/600=1/12.

3.La probabilità di avere una rana da un uovo è 50/2000=1/40.

4.La moltitudine di uova ha la funzione, selezionata dall'evoluzione della specie, di conservare la specie stessa, consentendo la riproduzione con una certa sicurezza dell'animale, anche in una situazione in cui la probabilità di raggiungere la fase adulta è piccola(1/40).