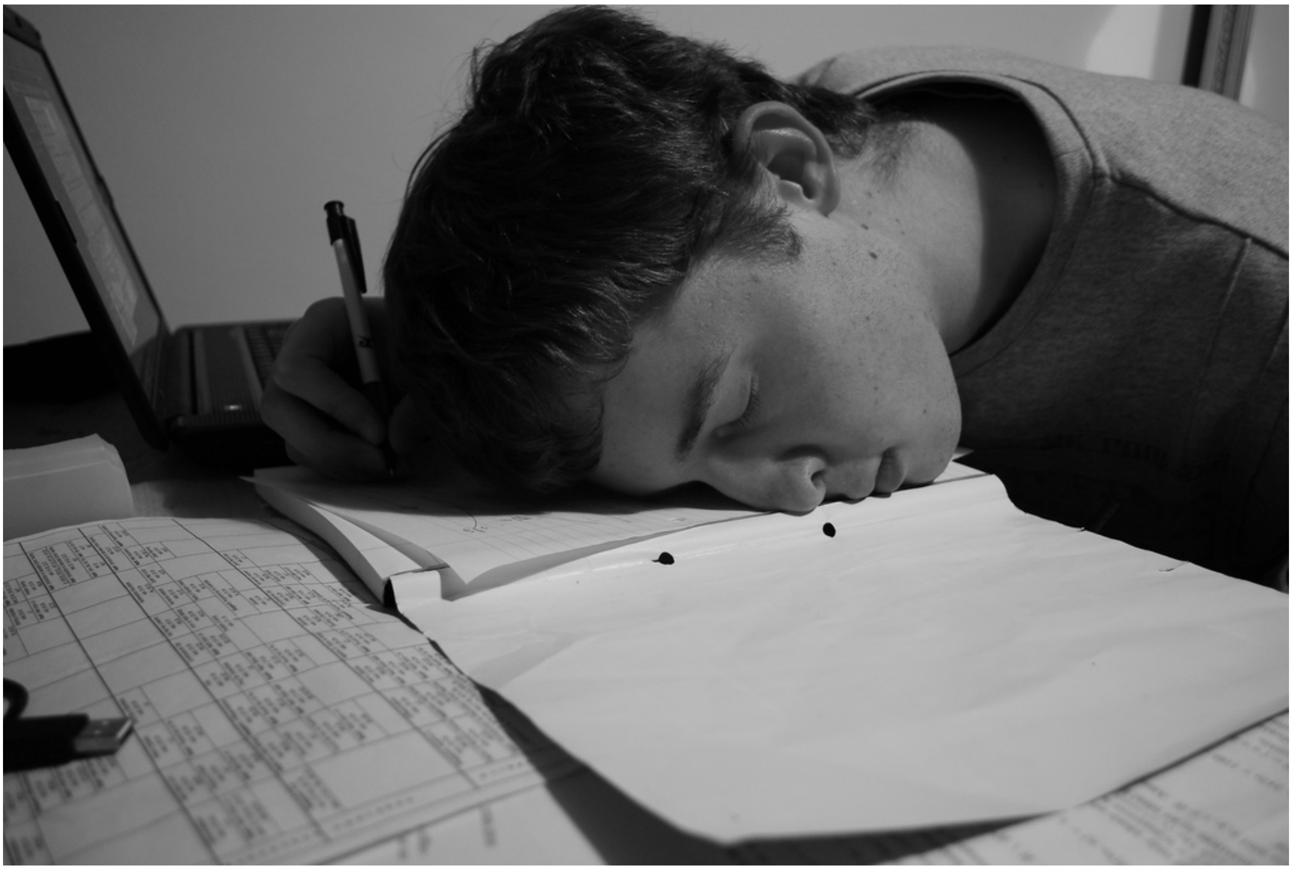
MATEMATICA C3 -ALGEBRA 2

2. EQUAZIONI DI SECONDO GRADO



Stuartpilbrow, *225/365 Z is for Zzzzzzzzzz*
http://www.flickr.com/photos/stuartpilbrow/3326749916/

Indice

►1. Definizioni

DEFINIZIONI. Si dice **equazione di secondo grado**, un'equazione del tipo: $a\,x^2+b\,x+c\;=\;0$ con $a\,,\,b\,,\,c\in\mathbb{R}\;\;e\;\;a\neq 0$. I valori *a, b, c* prendono il nome di **coefficienti** e, in particolare, *c* viene detto terzo coefficiente o **termine noto**. Un'equazione di secondo grado si definisce:
monomia quando il secondo e il terzo coefficiente sono nulli $a\,x^2\;=\;0$
incompleta pura quando il secondo coefficiente è nullo $a\,x^2+c\;=\;0$;
incompleta spuria quando il terzo coefficiente è nullo $a\,x^2+b\,x\;=\;0$;
completa quando i tre coefficienti sono tutti diversi da zero $a\,x^2+b\,x+c\;=\;0$.

►2. Risoluzione di un'equazione di secondo grado pura

Il coefficiente della *x* è nullo e l'equazione si presenta nella forma: $ax^2+c\;=\;0$.
Si risolve ortando a secondo membro il termine noto e dividendo per il coefficiente di x^2:

$$a\,x^2+c=0\;\rightarrow\;a\,x^2\;=\;-c\;\rightarrow\;x^2\;=\;-\frac{c}{a}\;\rightarrow\;x_{1,2}\;=\;\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Esempi

- $4\,x^2-9\;=\;0$ risoluzione $4\,x^2\;=\;+9\;\rightarrow\;x^2\;=\;\frac{9}{4}\;\rightarrow\;x_{1,2}\;=\;\pm\sqrt{\frac{9}{4}}\;\rightarrow\;x_1\;=\;+\frac{3}{2}\;\vee\;x_2\;=\;-\frac{3}{2}$
- $4\,x^2+9\;=\;0$ risoluzione $4\,x^2+9\;=\;0\;\rightarrow\;x^2=-\frac{9}{4}$. L'equazione non ammette soluzioni reali in quanto il quadrato di un numero reale non è mai negativo.

In generale, le soluzioni dell'equazione incompleta pura $ax^2+c\;=\;0$ dipendono dal segno di $-\frac{c}{a}$:

- se -c/a>0, ovvero se *a* e *c* sono discordi, l'equazione ammette le **due soluzioni reali e distinte**:
- se -c/a<0, ovvero se *a* e *c* sono concordi, l'equazione **non ammette soluzioni reali;**
- se -c/a=0, allora $c\;=\;0$, l'equazione ha **due radici reali coincidenti nulle** $x_1\;=\;x_2\;=\;0$.

1	$x^2-1=0$	$x^2=\frac{49}{25}$	$2\,x^2-32=0$	R. $x_1=+4\;\vee\;x_2=-4$
2	$x^2-25=0$	$16\,x^2=1$	$3\,x^2+3=0$	R. $I.S.=\emptyset$
3	$x^2-9=0$	$25=9\,x^2$	$x^2-3=0$	R. $x_1=\sqrt{3}\;\vee\;x_2=-\sqrt{3}$
4	$x^2+36=0$	$4-x^2=0$	$x^2+4=0$	R. $I.S.=\emptyset$
5	$x^2=49$	$4-9\,x^2=0$	$5\,x^2-3=0$	R. $x_1=\frac{\pm\sqrt{15}}{5}$
6	$4\,x^2-9=0$	$9\,x^2-25=0$	$6\,x^2=0$	
7	$2\,x^2-1=0$	$4\,x^2+16=0$	$1+x^2=50$	
8	$3\,x^2-1=0$	$27\,x^2-3=0$	$7\,x^2=28$	
9	$4\,x^2-4=0$	$5\,x^2-125=0$	$0,04\,x^2=1$	
10	$x^2-0,01=0$	$0,5\,x^2-4,5=0$	$0,09\,x^2=0,01$	
11	$\frac{1}{2}\,x^2-2=0$	$x^2-\frac{9}{4}=0$	$x^2-\frac{1}{6}=0$	
12	$121\,x^2-\frac{1}{169}=0$	$x^2+\frac{9}{4}=0$	$4\left(x^2-\frac{3}{4}\right)=13$	R. $x_1=\pm 2$
13	$x^2-\sqrt{3}=0$	$-9\,x^2=-1$	$4\,x^2=-9$	
14	$x^2+6=42$	$5-125\,x^2=0$	$18-x^2=0$	
15	$(x+3)^2=6\,x+34$	$(x+1)^2=25$	$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=13$	
16	$(x+\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}\,x$	$(x-2)^2+(1-x)^2=1-6x$	$(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3})(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3})=0$	

►3. Risoluzione di un'equazione incompleta spuria

Un'equazione incompleta spuria si presenta nella forma: $a x^2+b x = 0$.
Per risolverla, si raccoglie a fattore comune la *x*: $x(a x+b) = 0$

Applicando la legge di annullamento del prodotto si ottiene x=0 oppure ax+b=0 da cui $x=-\frac{b}{a}$.

Pertanto un'equazione di questo tipo ha sempre due soluzioni di cui una nulla.

Esempio

- $2 x^2-4 x = 0$

Raccogliendo a fattor comune si ha: $2 x(x-2) = 0$ da cui, applicando la legge di annullamento del prodotto, segue che $2x=0 \vee x-2=0$ da cui $x=0 \vee x=2$.

- $x^2+x=0$

Si raccoglie x a fattore comune, si ha $x(x+1)=0$

per la legge di annullamento del prodotto $\begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$ le soluzioni sono $x=0 \vee x=-1$

17	$x^2-3x=0$	$3x^2-2x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{3}$
18	$x^2-3x=0$	$7x^2+2x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=-\frac{2}{7}$
19	$x^2+2x=0$	$x^2+5x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=-5$
20	$x^2-x=0$	$18x^2-36x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=2$
21	$2x^2+6x=0$	$1000x-2000x^2=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{2}$
22	$9x^2+16x=0$	$6x^2=5x$	R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{5}{6}$
23	$5x=25x^2$	$3x^2-2x=4x$	R. $x_1=0 \vee x_2=2$
24	$81x^2=9x$	$0{,}1x^2-0{,}5x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=5$
25	$7x^2-2x=0$	$0{,}5x^2+0{,}1x=0$	R. $x_1=0 \vee x_2=0{,}2$
26	$x^2+\frac{1}{2}x=0$	$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2=0$	
27	$\sqrt{2}x^2+\sqrt{3}x=0$	$x^2+\sqrt{2}x=0$	
28	$-2x^2+4x=0$	$5\sqrt{2}x^2-2\sqrt{2}x=0$	
29	$\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{4}x=0$	$3x^2-\frac{4}{3}x=0$	
30	$(x-2)^2=4$	$(x+1)^2=1$	
31	$(x+\sqrt{2})^2=2$	$77x-11x^2=0$	
32	$\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x=0$	$\frac{11}{3}x^2=-2x$	
33	$\frac{1}{2}(x-2)^2-x=2$		R. $x_1=0 \vee x_2=6$
34	$(x-1)(x+3)=3x^2-3$		R. $x_1=0 \vee x_2=1$
35	$(3x-2)^2-4=6x^2$		R. $x_1=0 \vee x_2=4$
36	$(x-2)^2+(1-x)^2=5$		
37	$(x-2)^3=(x+2)(x^2-2x+4)$		
38	$(\sqrt{2}+x)^3-(\sqrt{3}+x)^3=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$		
39	$(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2+(x-1)^2$		
40	$(x^2+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)+(2x+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}+\sqrt{3}=0$		

►4. Risoluzione di un'equazione completa

Per risolvere l’equazione di secondo grado completa si applica una formula che si ottiene utilizzando il metodo del completamento del quadrato:

$a x^2+b x+c = 0$	
$4 a^2 x^2+4 a b x+4 a c = 0$	si moltiplicano ambo i membri per $4a$
$4 a^2 x^2+4 a b x+4 a c+b^2 = b^2$	si aggiunge ad ambo i membri b^2
$4 a^2 x^2+4 a b x+b^2 = b^2-4 a c$	si porta $4ac$ a secondo membro
$(2 a x+b)^2 = b^2-4 a c$	il primo membro risulta il quadrato di un binomio
$k = 2 a x+b$	sostituiamo il binomio $2ax+b$ con la la variabile k
$k^2 = b^2-4 a c$	l'equazione diventa un'equazione di secondo grado pura in k
$k_{1,2} = \pm\sqrt{b^2-4 a c}$	calcoliamo le soluzioni in k
$2 a x+b = \pm\sqrt{b^2-4 a c}$	al posto di k sostituiamo il binomio $2ax+b$
$2 a x = -b\pm\sqrt{b^2-4 a c}$	si separa il monomio con l’incognita
$x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4 a c}}{2 a}$	si risolve l'equazione di primo grado rispetto alla x

Si è soliti porre $\Delta = b^2-4 a c$.

Le soluzioni sono quindi date dalla formula: $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2 a}$

Δ prende il nome di **discriminante** dell’equazione. La parola discriminante deriva dal verbo *discrimen* (divisione); in effetti, il Δ permette di effettuare una distinzione tra la tipologia delle soluzioni di un’equazione di secondo grado.

Si possono infatti presentare tre casi:

- Primo caso $\Delta = b^2-4 a c > 0$

Il radicale $\sqrt{\Delta}$ è un numero reale e l’equazione ammette le **due soluzioni reali e distinte**:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 a} \vee x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 a}$$

- Secondo caso: $\Delta = b^2-4 a c = 0$

L’equazione ammette **due radici reali e coincidenti** date dall’espressione: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2 a}$

- Terzo caso: $\Delta = b^2-4 a c < 0$

L’equazione **non ammette soluzioni reali**

Riassumendo e schematizzando si ha:

Equazione $a x^2+ b x+c = 0$ completa con $a\neq 0$	
Discriminante	Soluzioni
$\Delta>0$	Due soluzioni reali e distinte $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2 a}$
$\Delta=0$	Due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2 a}$
$\Delta<0$	Nessuna soluzione reale $I.S. = \emptyset$

Esempi

- $3x^2-5x+2=0$

$a=+3,\ b=-5,\ c=+2;\ \rightarrow\ \Delta=b^2-4ac\ \rightarrow\ \Delta=(-5)^2-4(+3)(+2)=25-24=1$ poiché $\Delta>0$ l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ \rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{(+2)(+3)}\ \rightarrow\ x_{1,2}=\frac{5\pm1}{6}\ \rightarrow\ x_1=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1\ \vee\ x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

- $4x^2-12x+9=0$

$a=+4,\ b=-12,\ c=+9;\ \rightarrow\ \Delta=b^2-4ac\ \rightarrow\ \Delta=(-12)^2-4(+4)(+9)=144-144=0$

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\ \rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-(-12)}{2(+4)}=\frac{12}{8}\ \rightarrow\ x_1=x_2=\frac{3}{2}$$

- $x^2-x+3=0$

$a=+1,\ b=-1,\ c=+3;\ \rightarrow\ \Delta=b^2-4ac\ \rightarrow\ \Delta=(-1)^2-4(+1)(+3)=1-12<0$. Poiché il delta è negativo l'equazione non ha soluzioni reali.

Risolvi le seguenti equazioni complete

41 $x^2-5x+6=0$ R. $x_1=2\vee x_2=3$ — $x^2+x-20=0$ R. $x_1=-5\vee x_2=4$

42 $2x^2-6x-6=0$ R. $x_1=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ — $x^2-3x+6=0$ R. $I.S.=\emptyset$

43 $-x^2+x+42=0$ R.. $x_1=-6\vee x_2=7$ — $-x^2+10x-25=0$ R. $x_1=x_2=5$

44 $-2x^2+7x-5=0$ R. $x_1=1\vee x_2=\frac{5}{2}$ — $3x^2+2x-1=0$ R. $x_1=-1\vee x_2=\frac{1}{3}$

45 $2x^2-\sqrt{5}x-1=0$ R. $x_1=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{13}}{4}$ — $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$ R $x_1=\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$

46 $x^2-3x-2=0$ R. $x_1=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ — $-2x^2+\sqrt{2}x+6=0$ R. $x_1=-\sqrt{2}\vee x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

47 $-\frac{4}{3}x^2-x+\frac{3}{2}=0$ R. $x_1=-\frac{3}{2}\vee x_2=\frac{3}{4}$ — $-\frac{4}{5}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{20}=0$ R. $x_1=\frac{1}{8}\vee x_2=\frac{1}{2}$

48 $-x^2+4x-7=0$ R. $I.S.=\emptyset$ — $x^2-\sqrt{5}x-\sqrt{5}=0$ R $x_1=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{2}$

49 $x^2-5x+3=0$ R. $x_1=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$ — $x^2-4x+9=0$ R. $I.S.=\emptyset$

50 $x^2-4x-9=0$ R. $x_1=2\pm\sqrt{13}$ — $x^2+6x-2=0$ R. $x_1=-3\pm\sqrt{11}$

51 $x^2-3x-\frac{5}{2}=0$ R. $x_1=\frac{3\pm\sqrt{19}}{2}$ — $2x^2-3x+1=0$ R. $x_1=1\vee x_2=\frac{1}{2}$

52 $\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x-1=0$ R. $x_1=1\vee x_2=-\frac{3}{4}$ — $3x^2+x-2=0$ R. $x_1=-1\vee x_2=\frac{2}{3}$

53 $3x^2-\frac{2}{3}x-1=0$ R. $x_1=\frac{1\pm2\sqrt{7}}{9}$ — $\sqrt{2}x^2-x-3\sqrt{2}=0$ R. $x_1=-\sqrt{2};x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

54 $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$ R. $x=\sqrt{2}\vee x=\sqrt{3}$ — $x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0$ R. $x=\sqrt{3}\vee x=-\sqrt{2}$

55 $(3x+1)^2-(2x+2)^2=0$ R. $x=-\frac{3}{5}\vee x=1$ — $(x+5)^2=5(4x+5)$ R. $x_1=0\vee x_2=10$

56 $(x-2)(3-2x)=x-2$ R. $x_1=1\vee x_2=2$ — $(x+200)^2+x+200=2$ R. $-199;-202$

57 $(x^2+x+1)(x^2-x-1)=(x^2-1)^2$ R. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$

►5. Formula ridotta per equazioni di secondo grado

Se nell'equazione $a x^2+b x+c=0$ il coefficiente b è un numero pari, conviene applicare una formula, detta **formula ridotta**, che semplifica i calcoli.
Supponiamo $b=2k$, l'equazione $a x^2+b x+c=0$ diventa $a x^2+2 k x+c=0$ nella formula risolutiva dell'equazione si ottiene:

$$x_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{(2k)^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4(k^2-ac)}}{2a}=$$

$$=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{2\left(-k\pm\sqrt{k^2-ac}\right)}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$$

Dato che $b=2k$ quindi $k=\frac{b}{2}$ la formula ridotta che conviene utilizzare quando *b* è pari è:

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

La quantità sotto radice, uguale a $\frac{\Delta}{4}$, è detta anche **discriminante ridotto**.

Vediamo qualche applicazione pratica della formula ridotta.

Esempi

- $x^2-4x+3=0$

Il coefficiente di primo grado è pari, per cui conviene utilizzare la formula ridotta :

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1(3)}}{1}=2\pm\sqrt{1}$$ quindi $x_1=1 \vee x_2=3$.

- $-x^2-2x+24=0$

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-(-1)(24)}}{-1}=-1\pm\sqrt{25}$$ quindi $x_1=-6 \vee x_2=4$

- $-3x^2-6x+12=0$

Dividendo l’equazione per -3 si, per il secondo principio di equivalenza, l’equazione equivalente $x^2+2x-4=0$ Poiché il coefficiene della x è pari si può applicare la formula ridotta.

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-1(-4)}}{1}=-1\pm\sqrt{5}$$ quindi $x_1=-1+\sqrt{5} \vee x_2=-1-\sqrt{5}$

Quando b è pari e a vale 1, la formula si dice **ridottissima** $x_{1,2}=\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$.

- $x^2-6x+8=0$

$$x_{1,2}=\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1\rightarrow x_1=2\,;\,x_2=4$$

Risolvi le seguenti equazioni, applicando quando possibile la formula ridotta o ridottissima.

58 $3x^2-2x-2=0$ R. $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{3} \vee x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$

59 $x^2+6x-3=0$ R. $x_1=-3+2\sqrt{3} \vee x_2=-3-2\sqrt{3}$

60 $4x^2-8x+3=0$ R. $x_1=\frac{1}{2} \vee x_2=\frac{3}{2}$

61 $7x^2-2x-5=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=-\frac{5}{7}$

62 $40x^2+80x-30=0$ R. $x_1=\frac{-2+\sqrt{7}}{2} \vee x_2=\frac{-2-\sqrt{7}}{2}$

63 $5x^2-4x+1=0$ R. $I.S.=\emptyset$

64 $5x^2-4x-9=0$ R. $x_1=-1 \vee x_2=\frac{9}{5}$

65 $\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{3}{4}=0$ R. $x_1=\frac{-4+\sqrt{34}}{6} \vee x_2=-\frac{4+\sqrt{34}}{6}$

66 $6x^2-4x-2=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=-\frac{1}{3}$

67 $90x^2-180x-270=0$ R. $x_1=3 \vee x_2=-1$

68 $\frac{3}{2}x^2-4x+2=0$ R. $x_1=2 \vee x_2=\frac{2}{3}$

69 $\frac{4}{3}x^2-6x+6=0$ R. $x_1=3 \vee x_2=\frac{3}{2}$

70 $x^2-6x+1=0$ R. $x_1=3+2\sqrt{2} \vee x_2=3-2\sqrt{2}$

71 $3x^2-12x-3=0$ R. $x_1=2+\sqrt{5} \vee x_2=2-\sqrt{5}$

72 $7x^2-6x+8=0$ R. $I.S.=\emptyset$

73 $3x^2-18x+27=0$ R. $x_1=x_2=3$

74 $9x^2+12x+1=0$ R. $x_1=\frac{-2+\sqrt{3}}{3} \vee x_2=-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

75 $9x^2-12x+4=0$ R. $x_1=x_2=\frac{2}{3}$

76 $4x^2-32x+16=0$ R. $x_1=4+2\sqrt{3} \vee x_2=4-2\sqrt{3}$

77 $3x^2+10x+20=0$ R. $I.S.=\emptyset$

►6. Esercizi vari sulle equazioni di secondo grado

Riassumiamo e schematizziamo la risoluzione di un'equazione di secondo grado:

Equazioni incomplete			
Coefficienti	Nome	Equazione	Soluzioni
$b=0,\ c=0$	Monomia	$a x^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$
$b=0,\ c\neq 0$	Pura	$a x^2 + c = 0$	se a e c sono concordi $I.S.=\emptyset$ se a e c sono discordi $x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$b\neq 0,\ c=0$	Spuria	$a x^2 + b x = 0$	$x_1=0 \vee x_2=-\frac{b}{a}$
Equazione completa $a x^2 + b x + c = 0$ con $a\neq 0$			
$\Delta>0$	Due soluzioni reali e distinte		$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\Delta=0$	Due soluzioni reali e coincidenti		$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta<0$	Nessuna soluzione reale		$I.S. = \emptyset$

Esercizi vari sulle equazioni di 2° grado

78 $(3x+1)\left(\frac{5}{2}+x\right)=2x-1$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{7}{6}$

79 $(3x-2)^2+(5x-1)^2=(3x-2)(5x-1)$ R. $\Delta<0$

80 $3x-x^2=x^2+3(x-2)$ R. $x_1=\sqrt{3} \vee x_2=-\sqrt{3}$

81 $2(x-1)(x+1)=2$ R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

82 $(2x-1)(4-x)-11x=(1-x)^2$ R. $I.S.=\emptyset$

83 $2x^2=x+x^2-(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$

84 $(x-3)^2=9-6x$ R. $x_1=x_2=0$

85 $(x-2)^3-1=x^3+12x-11$ R. $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

86 $\frac{3x-2}{2}=x^2-2$ R. $x_1=2 \vee x_2=-\frac{1}{2}$

87 $(2x-3)(2x+3)=27$ R. $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=+\frac{3}{2}$

88 $\frac{x-3}{2}-\frac{x^2+2}{3}=1+x$ R. $I.S.=\emptyset$

89 $\frac{x-2}{3}-(3x+3)^2=x$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{29}{27}$

90 $(x-2)^3-x^3=x^2-4$ R. $x_{1,2}=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{7}$

91 $x(1-5x)=[3-(2+5x)]x-(x^2-1)$ R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

92 $(x+1)^3-(x+2)^2=\frac{2x^3-1}{2}$ R. $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{4}$

93 $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{2x-5}{3}=-\frac{5}{3}x$ R. $I.S.=\emptyset$

94 $(x+2)^3+4x^2=(x-2)^3+16$ R. $x_1=x_2=0$

95 $(2-x)^3-(2-x)^2=\frac{3-4x^3}{4}$ R. $I.S.=\emptyset$

96 $3(x+\sqrt{2})^2-18(x+\sqrt{2})+27=0$ R. $x_1=x_2=3-\sqrt{2}$

97 $(4-3x)^3+27x^3=64+24x$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{14}{9}$

98 $\left(\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}\right)^2=(x+1)^2$ R. $x_1=-\frac{8}{5} \vee x_2=-\frac{4}{7}$

99 $(\sqrt{3}x+1)^2+(\sqrt{3}x-1)^2-3(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)=0$ $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

100 $\frac{(2x+1)(x-2)}{3}+\frac{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{2}=\frac{(x-1)^2}{6}$ $x=\frac{1\pm\sqrt{31}}{3}$

101 $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3=\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$ $x=-2$

102 $(x-1)^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})(x-1)+\sqrt{15}=0$ $x=\sqrt{3}+1 \vee x=\sqrt{5}+1$

103 $\frac{(3x-1)^2}{3}-\frac{(1-2x)^2}{5}+\frac{3x(x-1)}{5}+\frac{(1+x)^2}{3}=0$ $\Delta=-\frac{1027}{225}$

104 $\frac{1}{\sqrt{10}}x^2+1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)x$

105 $(3x-1)^2+(2x+1)^2=(3x-1)(2x+1)$ R. $I.S.=\emptyset$

106 $(x+1)^4-(x+1)^3=x^3(x+4)-x(x+1)^2+3x$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{5}$

107 $\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^3+\frac{1}{6}x^2=\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^3+\frac{1}{6}(x+1)^3+\frac{3}{2}x^4$ R. $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{141}}{6}$

108 $\frac{x-2}{2}\cdot\frac{x+2}{3}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{3}$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{25}$

109 $(2-3x)^2-1=8(1-2x)+(2x+1)^2-1$ R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

110 $x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{6}=0$ R. $x_1=-\sqrt{3} \vee +\sqrt{2}$

111 $\frac{2\sqrt{3}x+1}{\sqrt{2}}-(x-\sqrt{3})^2=\frac{1-3\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}x(\sqrt{2}+2)$ R. $I.S.=\emptyset$

112 $\sqrt{3}(2x-30)^2-2\sqrt{27}(60-4x)=0$ R. $x_1=9; x_2=15$

113 $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$ R. $x_1=-\frac{2}{3} \vee x_2=\frac{2}{13}$

114 $\frac{x^2-16}{9}+\frac{(x-1)^2}{3}=\frac{x(x-2)}{9}+\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ R. $x_{1,2}=\frac{31\pm\sqrt{433}}{24}$

115 $\frac{(x-1)(x+2)}{2}+\frac{(x+2)(x-3)}{3}=\frac{(x-3)(x+4)}{6}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=\frac{1}{2}$

116 $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{x-1}{2}-\frac{x}{3}\right)x=-x^2+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{9}$ R. $x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10}}{54}$

117 $\frac{1}{4}(2x-1)^2-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{(x-2)(x+2)}{2}-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}=0$ R. $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{331}}{14}$

118 $\frac{1}{2}(2x-1)(x+1)+\frac{1}{3}(x^2-5)+2x(x-1)(x+1)=2(x+2)^3-(2x-1)^2$ R. $x_{1,2}=\frac{-177\pm\sqrt{14849}}{80}$

119 $\frac{3x-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}-\frac{(x-\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}=\frac{x^2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+2x-2\sqrt{3}$ R. $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

120 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3x^2-7x+2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{5x-13}{2}=\frac{2}{3}x(1-x)-\frac{73}{12}x+\frac{15}{12}$ R. $x_1=-6 \vee x_2=+6$

121 $\frac{(x^2+2x+1)^2}{4}+\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x^4-1)}{8}-(2x^2-2x+1)^2+9x^3\left(\frac{3}{8}x-1\right)+\frac{1}{4}x^2(x^2+20)=0$ R. $x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{5}}{4}$

Equazioni che si possono risolvere con opportune sostituzioni

Esempi

- $(x-1)^2=16$

Sostituendo $x-1=t$ l'equazione diventa $t^2=16$, le cui soluzioni sono $t_1=-4\,;\ t_2=+4$. Per determinare la x sostituiamo i valori di t trovati nella relazione $x-1=t$ si ha

$$\begin{cases} x-1=-4 \rightarrow x=-4+1=-3 \\ x-1=+4 \rightarrow x=+4+1=+5 \end{cases}$$

- $(x-1)^2+2(x-1)=0$

Sostituendo $x-1=t$ l'equazione diventa $t^2+2t=0$ che si risolve mettondo t a fattore comune $t(t+2)=0 \rightarrow t_1=0 \vee t+2=0 \rightarrow t_2=-2$.

Sostituendo in $x-1=t$ si ha $\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=+1 \\ x-1=-2 \rightarrow x=-2+1=-1 \end{cases}$

Risolvi le seguenti equazioni con opportune sostituzioni:

122 $(4x+3)^2=25$ R. $x_1=-2 \vee x_2=\frac{1}{2}$

123 $(x-5)^2+9=0$

124 $(3x-1)^2-36=0$

125 $4(2x+1)^2=36$

126 $(3x-5)^2-49=0$ R. $x_1=4 \vee x_2=-\frac{2}{3}$

127 $3(2x+5)^2-4(2x+5)=0$

128 $(3\cdot 10^3 x-10)^2-5(3\cdot 10^3 x-10)=-6$

129 $3(1-2x)^2-2(1-2x)-1=0$

130 $\frac{4}{3}(x-2)^2-6(x-2)+6=0$ R. $x_1=5 \vee x_2=\frac{7}{2}$

131 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

132 $2(x^2-1)^2+3(x^2-1)-5=0$

133 $3(34x-47)^2-2(34x-47)=1$ R. $x_1=\frac{24}{17} \vee x_2=\frac{70}{51}$

134 $(x-\sqrt{(2)})^2-(\sqrt{(2)}+1)(x-\sqrt{(2)})+\sqrt{(2)}=0$

►7. Discussione e risoluzione di equazioni numeriche frazionarie

DEFINIZIONE: Un'**equazione** in cui compare l'incognita al denominatore si chiama **frazionaria o fratta.**

Esempi

■ $\frac{3x+2}{1+x}=\frac{2x+3}{x-2}$

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori: $m.c.m.=(1+x)\cdot(x-2)$

2° passo: imponiamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: $C.E.\ x\neq -1 \wedge x\neq 2$
La ricerca dei valori che risolvono l'equazionesi restringe ai numeri reali appartenenti all'insieme, $D=R-\{-1,2\}=I.D.$ detto **D**ominio dell'equazione o **I**nsieme di **D**efinizione

3° passo: applichiamo il primo principio d'equivalenza trasportando al primo membro la frazione del secondo membro $\frac{3x+2}{1+x}-\frac{2x+3}{x-2}=0$.

Riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) $\frac{(3x+2)\cdot(x-2)-(2x+3)\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(x-2)}=0$

4° passo: applichiamo il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $(3x+2)\cdot(x-2)-(2x+3)\cdot(1+x)=0$

5° passo: svolgendo i calcoli ci accorgiamo che l'equazione è di secondo grado; portiamo l'equazione alla forma canonica: $3x^2-6x+2x-4-2x-3-2x^2-3x=0 \rightarrow x^2-9x-7=0$

6° passo: calcoliamo il discriminante: $\Delta=b^2-4ac=81+28=109$ essendo positivo, l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali distinte:

$$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{109}}{2} \rightarrow x_1=\frac{9-\sqrt{109}}{2} \vee x_2=\frac{9+\sqrt{109}}{2}$$

7° passo: confrontiamo le soluzioni con le **C.E.** ; in questo caso le radici appartengono all'insieme **D**; diciamo che sono accettabili e l'insieme soluzione è: $\boldsymbol{I.S.}=\left\{\frac{9-\sqrt{109}}{2},\ \frac{9+\sqrt{109}}{2}\right\}$

■ $\frac{x^2}{x^2-3x+2}=\frac{x-2}{x-1}+\frac{1}{x+2}$

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori; per fare questo dobbiamo scomporre in fattori i denominatori. Riscriviamo: $\frac{x^2}{(x-2)(x-1)}=\frac{x-2}{x-1}+\frac{1}{x+2}$ il m.c.m. è $(x-2)(x-1)(x+2)$

2° passo: imponiamo le Condizioni di Esistenza: $C.E.\ x\neq 1 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq -2$ quindi $D=\mathbb{R}-\{1,2,-2\}=I.D.$.

3° passo: trasportiamo al primo membro ed uguagliamo a zero; riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) ambo i membri dell'equazione: $\frac{x^3+2x^2-x^2+3x-2-x^3-2x^2+4x^2+8x-4x-8}{(x-2)(x-1)(x+1)}=0$

4° passo: applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $3x^2+7x-10=0$

5° passo: calcoliamo il discriminante: $\Delta=b^2-4ac=49+120=169$ essendo positivo, l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali distinte: $x_{1,2}=\frac{-7\pm 13}{6} \rightarrow x_1=-\frac{10}{3} \vee x_2=1$

6° passo: confrontiamo con le C.E. ; in questo caso solo x_1 appartiene all'insieme D; diciamo che l'insieme soluzione è: $\boldsymbol{I.S.}=\left\{-\frac{10}{3}\right\}$ mentre $x_2=1$ non è accettabile.

*Determina l'**I**nsieme **S**oluzione delle seguenti equazioni frazionarie:*

135 $\frac{3}{x}-2=x$ R. $x_1=-3 \vee x_2=1$

136 $\frac{4-3x}{x}=\frac{3-2x}{x^2}$ R. $x_1=x_2=1$

137 $\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}-1$ R. $I.S.=\emptyset$

138 $\frac{x}{2}=\frac{x+2}{x-2}+1$ R. $x_1=0 \vee x_2=6$

139 $\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=0$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-2$

140 $\frac{3x}{x^2-9}+\frac{x}{2x-6}=1$ R. $x_{1,2}=\frac{9\pm3\sqrt{17}}{2}$

141 $\frac{x+9}{x-3}=2-\frac{x-3}{x+9}$ R. $I.S.=\emptyset$

142 $\frac{x}{x+1}=\frac{4}{x+2}$ R. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{5}$

143 $\frac{4x-3}{x^2-4}-\frac{3x}{x-2}=\frac{4}{2-x}-\frac{4x}{2+x}$ R. $x_1=1$; $x_2=5$

144 $\frac{3x+2}{2x^2-2x-12}-\frac{3-x}{4x-12}=-\frac{3}{x+2}$ R. $x_1=-19$; $x_2=2$

145 $\frac{2x+1}{x}=\frac{x}{2x+1}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{1}{3}$

146 $\frac{4-x}{18-2x^2}+\frac{2}{3-x}=\frac{6x}{4x+12}$ impossibile

147 $\frac{6}{9x^2-12x+4}+\frac{1}{3x-\frac{1}{2}}=0$

148 $x-1-\frac{1}{x-1}=\frac{6}{6-6x}$ impossibile

149 $\frac{6x-6}{x^2-4x+3}+\frac{x^2-x-6}{x-3}=-2$ R. $x_1=-3$; $x_2=2$

150 $\frac{x-4}{x-2}+\frac{x-1}{x^2-5x+6}-\frac{4-2x}{3-x}=0$ R. $x=-1$

151 $\frac{x-3}{x-1}-\frac{4}{3}+\frac{x-1}{x+1}=0$ R. $x_{1,2}=3\pm\sqrt{10}$

152 $\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{2+x}{x^2+x}=0$ R. $x_1=x_2=-1$

153 $3\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{3x-1}=10$

154 $\frac{x+1}{\sqrt{2}-x}=\frac{x-2}{x-2\sqrt{2}}$ R. $x_1=0\,;\,x_2=\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$

155 $\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{3x^2-3x}$ R. $x_1=-\frac{1}{2}\,;\,x_2=4$

156 $\frac{1}{2x-4}-\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x^2-3x+2}$ R. $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{97}}{4}$

157 $\frac{2x}{x^2+2x-8}-\frac{2x+7}{x^2-3x-4}=0$ R. $x_1=-2$; $x_2=\frac{28}{17}$

158 $\frac{1-x}{x^2-4x+3}-\frac{4}{9-x^2}+\frac{x-3}{x^2+4x+3}=-\frac{5}{3-x}$ R. $x_1=-5$; $x_2=-\frac{1}{5}$

159 $\frac{4x-7}{x+2}+\frac{1-6x^2}{x^2-5x+6}=\frac{x}{2x^2-2x-12}-2$ impossibile

160 $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{3}{(x-2)^3}$ R. $x_1=-1$; $x_2=3$

161 $\frac{1}{x+3}-\frac{5(x+2)}{(x+3)^2}=\frac{5x-1}{(x+3)^3}$ R. $x_1=-5$; $x_2=-1$

162 $\frac{3}{(3x-6)^2}-\frac{x^2-4}{(3x-6)^4}$ R. $x=\frac{28}{13}$

163 $\frac{2x}{x^2-2x+1}=\frac{-7}{3x^2-21x+18}+\frac{2x}{x^2-3x+2}$ R. $x_1=-14$; $x_2=-1$

164 $\frac{5x-3}{x^2-5x}+\frac{2}{x}=\frac{3x}{x^2+3x}-\frac{2}{x+3}-\frac{4}{5-x}$ R. $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{313}}{4}$

165 $\frac{x-9}{4x-x^2}-\frac{3x+2}{2-x}=\frac{x-5}{x+2}+\frac{2x^4+6x^3}{x(x-4)(x^2-4)}$ impossibile

166 $\frac{3(x+1)}{x-1}=1-\frac{2x-3}{x}$

167 $\frac{3-3x}{x^2-1}+\frac{8x}{2-2x}=0$ R. $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{8}$

168 $\frac{1}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}+\frac{2x}{3x+8}+\frac{31}{3x^2-27}=\frac{1}{3}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=1$

169 $\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}}=\frac{2x}{1-x}-\frac{2x}{1+x}$ R. $x_1=-\frac{1}{3} \vee x_2=\frac{1}{3}$

170 $\frac{x+1}{x-2\sqrt{3}}-\frac{1-x}{x+2\sqrt{3}}=\frac{x^2+8}{x^2-12}$ R. $x_1=\sqrt{6}-\sqrt{2} \vee x_2=\sqrt{2}-\sqrt{6}$

171 $\frac{2x+1}{1+x}+\frac{5}{1-x}-\frac{2}{x^2-1}=0$

172 $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{2(3x-1)}{x^2}=5$ R. $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=\frac{1}{2}$

173 $\frac{(x-2)^2}{x^2-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x}{2x+2}$ R. $x_1=\frac{4}{3} \vee x_2=3$

174 $-\frac{x^2}{x+2}+\frac{2x}{x-2}=\frac{-x+x^3}{x^2-4}$ R. $x_1=0 \vee x_2=3$

175 $\frac{5}{x+1}+\frac{2x}{x-2}=\frac{6x^2-10}{x^2-x-2}$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{7}{4}$

176 $\frac{x+1}{x-2}-\frac{3x}{x+3}=\frac{x^2+2x}{x^2+x-6}$ R. $x_1=-\frac{1}{3} \vee x_2=3$

177 È vero che in $\mathbb{R}$ $\frac{3}{1+x^2}=\frac{3}{x^4+2x^2+1}$ e $\frac{2x+14}{x^3-x^2+4x-4}-\frac{4}{x-1}=\frac{2}{x^2+4}$ sono equivalenti?

178 Verifica che vale 1 il prodotto delle soluzioni dell'equazione $\frac{x}{1-x^3}+\frac{2x-2}{x^2+x+1}=0$.

179 Sull'asse reale rappresenta il **D**ominio e l'**I**nsieme **S**oluzione dell'equazione $\frac{x+2}{x}=2+\frac{x}{x+2}$.

180 Stabilisci se esiste qualche numero reale per cui la somma delle due frazioni $f_1=\frac{2-x}{x+2}$ *e* $f_2=\frac{x+1}{x-1}$ è uguale a $\frac{9}{5}$.

181 L'espressione $E=\frac{4x}{1-x^2}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}$ non assume mai il valore –1. VERO o FALSO?

►8. Discussione e risoluzione di equazioni letterali

Ricordiamo la:

DEFINIZIONE. Una equazione è letterale se i coefficienti dell'incognita sono espressioni letterali, cioè se oltre all'incognita (in genere indicata con la lettera x) compare un'altra lettera (in genere a, b, k, ….).

Esempi

- $k\,x^2-(2k-1)x+(k-3)=0$ *Discutere al variare di k la realtà delle soluzioni.*

Il parametro k può assumere qualunque valore numerico e l'equazione rappresenta una famiglia di equazioni le cui caratteristiche variano a seconda dei valori attribuiti al parametro.
Notiamo subito che se k assume il valore zero, l'equazione non è più di secondo grado, se k assume il valore 3, l'equazione è ancora di secondo grado incompleta (spuria) mancando del termine noto.
Discutere un'equazione letterale di secondo grado significa analizzare come varia il suo insieme delle soluzioni al variare del parametro.

Ricordando la formula $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ in cui compaiono i tre coefficienti a, b, c

- il primo coefficiente è k, se $k=0$ l'equazione diventa $x-3=0$ di primo grado con $I.S.=\{3\}$;
- il secondo coefficiente è -2k+1, se è nullo, ossia se $k=\dfrac{1}{2}$ l'equazione diventa $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}=0$ equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-\sqrt{5}\vee x_2=\sqrt{5}$;
- il terzo coefficiente è k-3, se è nullo, cioè se $k=3$ l'equazione diventa $3x^2-5x=0$, equazione spuria con due soluzioni reali $x_1=0\vee x_2=\dfrac{5}{3}$

Per tutti i valori di k dell'insieme $\mathbb{R}-\left\{0,\dfrac{1}{2},3\right\}$ l'equazione è completa, l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta=(-2k+1)^2-4k(k-3)=8k+1$, quindi

- se $8k+1<0 \rightarrow k<-\dfrac{1}{8}$ l'equazione non ammette soluzioni reali e $I.S.=\emptyset$;
- se $8k+1\geq 0 \rightarrow k\geq -\dfrac{1}{8}$ l'equazione ammette due soluzioni reali:
  - distinte se $k>-\dfrac{1}{8} \rightarrow x_{1,2}=\dfrac{(2k-1)\pm\sqrt{8k+1}}{2k}$
  - coincidenti se $k=-\dfrac{1}{8} \rightarrow x_1=x_2=5$

Riassumendo:

$k\,x^2-(2k-1)x+(k-3)=0 \;\; con \;\; k\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Insieme soluzione	Equazione
$k=0$	$x=3$	Di primo grado
$k=\dfrac{1}{2}$	$x_1=-\sqrt{5}\vee x_2=+\sqrt{5}$	Pura
$k=3$	$x_1=0\vee x_2=\dfrac{5}{3}$	Spuria
$k\in\mathbb{R}-\left\{0,\dfrac{1}{2},3\right\}$		Completa: $\Delta=8k+1$
$k<-\dfrac{1}{8}$	$\Delta<0$ non esistono soluzioni reali $I.S.=\emptyset$	
$k\geq-\dfrac{1}{8}$	$\Delta\geq 0$ esistono soluzioni reali	
$k>-\dfrac{1}{8}$ reali distinte	$x_1=\dfrac{(2k-1)-\sqrt{8k+1}}{2k}\vee x_2=\dfrac{(2k-1)+\sqrt{8k+1}}{2k}$	
$k=-\dfrac{1}{8}$ reali coincidenti	$x_1=x_2=5$	

■ *Discutere, al variare di* $k \in \mathbb{R}$ *la realtà delle radici dell'equazione* $x^2-3x+1-k=0$.

I primo e il secondo coefficiente non dipendono dal parametro *k*, quindi analizziamo il terzo coefficiente.
Se $k=1$ l'equazione diventa un'equazione spuria con due radici reali $x_1=0 \vee x_2=3$.
Per tutti i valori di k dell'insieme $\mathbb{R}-\{1\}$ l'equazione è completa, l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta=9-4(1-k)=4k+5$, quindi:

- se $k<-\frac{5}{4}$ l'equazione non ammette soluzioni reali e $I.S.=\emptyset$
- se $k\geq -\frac{5}{4}$ l'equazione ammette due radici reali
  - distinte se $k>-\frac{5}{4} \rightarrow x_1=\frac{3-\sqrt{4k+5}}{2} \vee x_1=\frac{3+\sqrt{4k+5}}{2}$
  - coincidenti se $k=-\frac{5}{4} \rightarrow x_1=x_2=\frac{3}{2}$

$x^2-3x+1-k=0$ *con* $k\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Insieme soluzione	Equazione
$k=1$	$x=3$	Spuria
$k\in\mathbb{R}-\{1\}$		Completa: $\Delta=4k+5$
$k<-\frac{5}{4}$	$\Delta<0$ non esistono soluzioni reali $I.S.=\emptyset$	
$k\geq-\frac{5}{4}$	$\Delta\geq 0$ esistono soluzioni reali	
$k>-\frac{5}{4}$ reali distinte	$x_1=\frac{3-\sqrt{4k+5}}{2} \vee x_2=\frac{3+\sqrt{4k+5}}{2}$	
$k=-\frac{5}{4}$ reali coincidenti	$x_1=x_2=\frac{3}{2}$	

■ *Discutere la seguente equazione letterale:* $\frac{x^2}{m-1}+3+m=\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$

L'equazione pur presentando delle frazioni è intera, in quanto l'incognita x non compare al denominatore.
Se $m=0$ oppure $m=1$ l'equazione è priva di significato, quindi **C.E.** $m\neq 0 \wedge m\neq 1$.

- Trasportiamo a sinistra del segno di uguaglianza i termini di destra ed eseguiamo il calcolo nella parentesi: $\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)=0 \rightarrow \frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}-\frac{2mx}{m-1}\cdot\frac{1}{m}$;
- Semplifichiamo m nell'ultimo termine, poiché nelle C.E. $m\neq 0$ $\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}-\frac{2x}{m-1}=0$;
- Riduciamo allo stesso denominatore m-1, eliminiamo il denominatore essendo $m\neq 1$ per le C.E. Si ha: $x^2+3m-3+m^2-m-2mx-2x=0$;
- Scriviamo l'equazione di secondo grado in forma canonica $x^2-2x(m+1)+m^2+2m-3=0$

Discussione

- il primo coefficiente $a=1$ non dipende dal valore del parametro, quindi l'equazione è di secondo grado per qualunque valore di $m\in\mathbb{R}-\{0,1\}$;
- il secondo coefficiente $b=-2(m+1)$: se $m=-1$ l'equazione diventa $x^2-4=0$, equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-2 \vee x_2=2$;
- il terzo coefficiente $c=m^2+2m-3$: se $c=m^2+2m-3=0 \rightarrow m=1 \vee m=-3$ (non consideriamo il caso $m=1$ per le C.E.) l'equazione diventa $x^2+4x=0$, equazione spuria con due soluzioni reali $x_1=0 \vee x_2=-4$.

Prima conclusione: per tutti i valori di *m* nell'insieme $\mathbb{R}-\{0,1,-1,-3\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante.

- Calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=(m+1)^2-(m^2+2m-3)=4$; esso risulta indipendente dal valore del parametro e sempre positivo, quindi l'equazione ammette due soluzioni reali distinte $x_1=m-1 \vee x_2=m+3$.

Riassumendo in una tabella tutti i risultati ottenuti:

$\frac{x^2}{m-1}+3+m = \frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$ *con* $m\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Insieme soluzione	Equazione
$m=0 \vee m=1$		Priva di significato
$m=-1$	$x_1=-2 \vee x_2=2$	Pura
$\cancel{m=1} \vee m=-3$	$x_1=0;\ x_2=-4$	Spuria
$m\in\mathbb{R}-\{0,1,-1,-3\}$	$x_1=m-1 \vee x_2=m+3$	Completa: $\Delta=4$

■ *Discutere la seguente equazione parametrica:* $\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right) = k+\frac{2k}{kx-x^2}-1$

L'equazione è fratta, poiché nel denominatore compare l'incognita x.

- Trasportiamo i termini del secondo membro a sinistra del segno uguale e scomponiamo in fattori i denominatori: $\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1 = 0$; *C.E.* $x\neq 0 \wedge x\neq k \wedge x\neq -k$
- Svolgiamo i calcoli nella parentesi e moltiplichiamo $\frac{k^2+x^2}{x(k-x)}-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1 = 0$;
- Riduciamo allo stesso denominatore ed eliminiamo il denominatore $kx^2+kx\cdot(1-k)+k\cdot(k-2) = 0$.
  - il primo coefficiente è k, se $k=0$ le C.E. si riducono a $x\neq 0$ e l'equazione diventa $0x=0$ indeterminata, quindi $I.S.=\mathbb{R}-\{0\}$ per le condizioni poste sull'incognita.
    Avendo studiato il caso k=0, possiamo ora suppore $k\neq 0$, dividiamo tutti i coefficienti per *k*, l'equazione diventa $x^2+x\cdot(1-k)+(k-2) = 0$;
  - Il secondo coefficiente è 1-k, se $k=1$ le **C.E.** sono $x\neq 0 \wedge x\neq 1 \wedge x\neq -1$ e l'equazione diventa $x^2-1=0$, le soluzioni sono $x_1=-1 \vee x_2=1$ che non sono accettabili per le C.E.
  - il terzo coefficiente è k-2, se $k=2$ le **C.E.** sono $x\neq 0 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq -2$ e l'equazione diventa $x^2-x=0$ le cui soluzioni sono $x_1=0 \vee x_2=1$ di cui $x_1=0$ non accettabile per le C.E.

Per $k\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}$ l'equazione è completa, l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta=(1-k)^2-4(k-2)=(k-3)^2$; essendo $\Delta\geq 0\,\forall k$, si avranno sempre due soluzioni reali.

1. coincidenti se $k=3 \rightarrow x_1=x_2=1$ accettabili essendo le *C.E.* $x\neq -3 \wedge x\neq 0 \wedge x\neq 3$;
2. distinte se $k\neq 3 \rightarrow x_1=1 \vee x_2=k-2$ e confrontando con le C.E. si ottiene $x_1=1$ non accettabile se $k=-1$; x_2 sempre accettabile per $k\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3,-1\}$.

$\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right) = k+\frac{2k}{kx-x^2}-1$ *con* $k\in\mathbb{R}$			
Condizioni sul parametro	Condizioni sull'incognita	Insieme Soluzione	Equazione
	$x\neq -k \wedge x\neq 0 \wedge x\neq k$		
$k=0$	$x\neq 0$	$I.S.=\mathbb{R}-\{0\}$	indeterminata
$k=1$	$x\neq -1 \wedge x\neq 0 \wedge x\neq 1$	$x_1=-1 \vee x_2=1$ non accet.	pura
$k=2$	$x\neq -2 \wedge x\neq 0 \wedge x\neq 2$	$x_1=0 \vee x_2=1$ x_1 non accettabile	spuria
$K\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}$			Completa $\Delta=(k-3)^2$
$k=3$	$x\neq -3 \wedge x\neq 0 \wedge x\neq 3$	$x_1=x_2=1$ accettabili	
$K\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3\}$	$x\neq -k \wedge x\neq 0 \wedge x\neq k$	$x_1=1 \vee x_2=k-2$	
$k=-1$		$x_1=1$ non accettabile	
$K\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3,-1\}$		$x_2=k-2$ accettabile	

Risolvi le seguenti equazioni letterali ed eventualmente discutile

182 $x^2-ax=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=a$

183 $ax^2-4a^3=0$ R. $a=0 \rightarrow \mathbb{R}$; $a\neq 0 \rightarrow x_1=-2a \vee x_2=2a$

184 $x^2+(x-a)^2=2ax$ R. $x_1=\frac{1-\sqrt{2}}{2}a \vee x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{2}a$

185 $(2x-a)x=ax$ R. $x_1=0 \vee x_2=6$

186 $x^2-ax-6a^2=0$ R. $x_1=-2a \vee x_2=3a$

187 $(a-3)x^2-ax+3=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=\frac{3}{a-3}$

188 $ax^2-a^2x+x^2+x-ax-a=0$ R. $x_1=a \vee x_2=-\frac{1}{a+1}$

189 $\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a-1}=0$ R. $a\neq 0 \wedge a\neq 1 \rightarrow x_1=0 \vee x_2=\frac{1-a}{a}$

190 $\frac{x}{a+1}+\frac{x^2}{a-1}=0$ R. $a\neq -1 \wedge a\neq 1 \rightarrow x_1=0 \vee x_2=\frac{1-a}{a+1}$

191 $\frac{2x}{3+kx}-\frac{x}{3-kx}=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{k}$

192 $\frac{m-n}{mn}x^2=\frac{2m^2n}{m^2-n^2}-\frac{mn}{m+n}$ R. $x_{1,2}=\frac{\pm m}{m-n}$

193 $\frac{mx-x^2}{m^2-3m+2}-\frac{x}{2-m}-\frac{m+1}{m-1}=0$ R. $x_1=m-2 \vee x_2=m+1$

194 $\frac{x^2+2tx}{t^2-tx}-2=\frac{3t}{t-x}+\frac{x+t}{t}$ R. $x=-3t$

195 $\frac{x-1}{k+1}-\frac{x^2+1}{k^2-1}=\frac{2k}{1-k^2}$ R. $x_1=-1; x_2=k$

196 $2\cdot\sqrt{m}-x=\frac{m-1}{x}$ R. $x_{1,2}=\sqrt{m}\pm 1$

197 E' vero che l'equazione $1-\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k-x}=0$ ammette due soluzioni reali coincidenti se $k=2$?

198 Nell'equazione $(a-1)\cdot(x+a)=\frac{x+a}{x-1}\cdot[x(a+1)-2a]$, dopo aver completato la discussione, stabilisci per quali valori di a le radici che si ottengono dall'equazione completa sono entrambe positive.

199 È vero chetiva la verità della proposizione. "l'equazione $3kx^2+(x-k)^2+2k(k+x)=0$ ammette radici reali opposte se $k<-\frac{1}{3}$ "

200 Per quali valori di b l'equazione $\frac{5x^2-4(b+1)}{b^2-4}-\frac{3x-1}{b+2}=\frac{3-2x}{2-b}-\frac{3x}{b^2-4}$ ha una soluzione negativa?

201 Per l'equazione $(x-k-1)^2=(k+1)\cdot(k-2x+x^2)$, completate le implicazioni:

$k=0 \rightarrow$ equazione ………….. $\rightarrow$ $I.S.=$…………………

$k=-1 \rightarrow$ equazione ………….. $\rightarrow$ $x_1=$…………………

………… $\rightarrow$ equazione pura $\rightarrow$ due soluzioni reali ………… se …………$x_1=$……… $\vee$ $x_2=$………

202 Stabilisci per quali valori del parametro m l'equazione $\frac{m+2}{x-2}+mx=2$ ammette soluzioni reali distinte. Se $m=-2$ sono accettabili le radici reali trovate?

203 Dopo aver completato la discussione dell'equazione parametrica $\frac{x+1}{b-1}+\frac{b-1}{x+1}=\frac{3x^2+2-bx}{bx+b-1-x}$, determina se esiste qualche valore del parametro per cui $I.S.=\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$.

204 Le soluzioni dell'equazione $(x+b)^2=(b+1)^2$ con $b\neq -1$ sono:

[A] $x_1=-1;\ x_2=1$ [B] $x_1=-2b-1;\ x_2=1$ [C] $x_1=x_2=1$ [D] $x_1=1-2b;\ x_2=1$

205 Per quali valori di k l'equazione $x^2-(2k+1)x+3k+1=0$ ammette soluzioni reali coincidenti?

►9. Relazioni tra soluzioni e coefficienti

Consideriamo una generica equazione di secondo grado $a x^2+b x+c=0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali (cioè $\Delta \geq 0$), e sommiamo e moltiplichiamo le soluzioni (o radici) dell'equazione:

- $x_1+x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = -\frac{b^2-\Delta}{2a} = \frac{b^2+4ac-b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Quindi, la somma delle radici è $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ il prodotto delle radici è $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Queste relazioni valgono anche nel caso in cui le radici siano coincidenti ($\Delta=0$) e nel caso in cui le radici non siano reali ($\Delta<0$).

Esempio

- *Determina le radici dell'equazione* $x^2+2x-15=0$ *senza applicare la formula risolutiva, ma sfruttando la somma e il prodotto delle radici stesse.*

Calcolo il discriminante $\Delta=64$ pertanto le radici sono reali. Esse hanno come somma $-\frac{b}{a}=-2$ e come prodotto $\frac{c}{a}=-15$. Le coppie di numeri che hanno per prodotto -15 sono -3 e +5, oppure +3 e -5, oppure +15 e -1, oppure -15 e +1. Tra tutte queste coppie l'unica che ha per somma -2 è la coppia -5 e +3. Pertanto le soluzioni dell'equazione sono $x_1=3 \vee x_2=-5$.

- *Determina la somma e il prodotto delle soluzioni dell'equazione* $2x^2+11x-3=0$ *senza risolverla.*

Calcolo il discriminante $\Delta=145>0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-\frac{11}{2}$; $x_1 \cdot x_2=-\frac{3}{2}$.

- *Data l'equazione* $x^2\sqrt{2}+3x-2\sqrt{2}=0$ *, determina, senza risolverla, la somma e il prodotto delle radici.*

Calcolo il discriminante $\Delta=25>0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $x_1 \cdot x_2=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-2$.

- *Determina* somma e prodotto delle radici dell'equazione: $x^2+2x+15=0$

Calcolo il discriminante $\Delta=-56<0$ le radici non sono reali anche se la loro somma e il loro prodotto sono reali, infatti applicando le precendeti precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-2$ e $x_1 \cdot x_2=15$.

- *Determina* somma e prodotto delle radici dell'equazione: $x^{21}-12x+36=0$

Il discriminate $\Delta=12^2-4\cdot 36=144-144=0$. Le radici sono coindidenti, applicando la formula risolutiva si ha $x_1=x_2=6$. Applicando le formule per calcolare somma è prodotto si ha $x_1+x_2=12$ e $x_1 \cdot x_2=36$ da cui si conclude ugualmente che $x_1=x_2=6$.

- *Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla differenza delle radici.*

$x_1-x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ se $-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}>0 \rightarrow x_1>x_2$, se $-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}<0 \rightarrow x_1<x_2$

- *Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla somma dei reciproci delle radici.*

Si vuole cioè esprimere $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ attraverso i coefficienti *a*, *b*, *c* dell'equazione.

Osserviamo in via preliminare che tale somma è possibile con la condizione $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$ che implica $c \neq 0$. Si ha: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1 \cdot x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$

206 Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla somma dei quadrati delle radici. Si vuole esprimere, attraverso i coefficiente a, b, c dell'equazione la quantità $x_1^2+x_2^2$. Si tenga presente la seguente identità $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.

207 *Per ciascuna delle seguenti equazioni, completa la tabella sottostante:*

equazioni		discriminante	$I.S.\subset\mathbb{R}$?	x_1+x_2	$x_1\cdot x_2$
a)	$5x^2+2x-1=0$	$\Delta=$			
b)	$-3x^2+1=0$	$\Delta=$			
c)	$6x^2+7x=0$	$\Delta=$			
d)	$-x^2+x-1=0$	$\Delta=$			
e)	$x^2+2x+1=0$	$\Delta=$			
f)	$2x^2-7x+1=0$	$\Delta=$			

Senza risolvere le equazioni determina somma e prodotto dello loro radici

208 $x^2+4ax+a=0$ $\quad$ $2x^2-\sqrt{2}x+1=0$

209 $2x^2+6kx+3k^2=0$ $\quad$ $3\sqrt{3}x^2-6\sqrt{3}x+2=0$

210 $\sqrt{2}x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+4=0$ $\quad$ $(\sqrt{5}+\sqrt{3})x^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})x+1=0$

211 Dell'equazione $3\sqrt{2}x^2-5x+\sqrt{2}=0$ è nota la radice $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$; senza risolvere l'equazione determinare l'altra radice.

212 Senza risolvere le equazioni stabilisci quale ha come soluzioni due numeri reali positivi e quale due numeri reali reciproci: $e_1:\ 5x^2+2x-1=0$; $e_2:\ -x^2+x-1=0$; $e_3:\ 2x^2-7x+1=0$

213 Un'equazione di secondo grado ha il primo coefficiente uguale a $-\frac{3}{2}$; sapendo che l'insieme soluzione è $I.S.=\left\{-\frac{3}{4};\sqrt{2}\right\}$ determinate i suoi coefficienti b e c.

214 Dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ la somma delle soluzioni è $\frac{21}{5}$ e una soluzione è $x_1=3{,}2$; determinate x_2.

215 Determinate i coefficienti a, b, c di un'equazione di secondo grado sapendo che $x_1=1-\sqrt{2}$, il prodotto delle soluzioni è -1 e la somma del secondo con il terzo coefficiente è 9.

216 Determinate i coefficienti b e c dell'equazione $x^2+bx+c=0$ sapendo che una radice è tripla dell'altra e la loro somma è 20.

217 Dopo aver completato la discussione dell'equazione parametrica $\frac{x+1}{b-1}+\frac{b-1}{x+1}=\frac{3x^2+2-bx}{bx+b-1-x}$, determina se esiste qualche valore del parametro per cui $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$.

Determinare due numeri conoscendone la somma e il prodotto

Consideriamo la generica equazione di secondo grado $a x^2+bx+c=0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali x_1 e x_2 . Essendo $a\neq 0$, è possibile dividere ambo i membri per *a*, ottenendo: $x^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0$. Dato che $s=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e $p=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ si avrà $x^2-s\,x+p=0$.

Tale equazione risolve quindi la classe di problemi del tipo: "*determinare due numeri che sommati danno s e moltiplicati danno p.*"

Dall'equazione $x^2-s\,x+p=0$ discende che tali numeri esistono reali se e solo se $\Delta=s^2-4\,p\geq 0$ ovvero se il quadrato della somma è maggiore o uguale al quadruplo del loro prodotto.

Esempi

- *Determinare due numeri che sommati danno 12 e moltiplicati danno 35.*

L'equazione che risolve il problema è: $x^2-12\,x+35=0$. Le soluzioni sono $x_1=5\ \vee\ x_2=7$.

- *Determinare due numeri che sommati danno 5 e moltiplicati danno 9.*

L'equazione che risolve il problema è: $x^2-5\,x+9=0$.

Poiché $\Delta=s^2-4\,p=25-36=-11$, l'equazione non ammette soluzioni reali e, di conseguenza, non esistono due numeri aventi la somma e il prodotto richiesti.

Determina, se possibile, due numeri aventi somma e prodotto indicati

218 $S=3;\ P=5$ $\qquad$ $S=7;\ P=2$

219 $S=-3;\ P=-8$ $\qquad$ $S=-5;\ P=4$

220 $S=\frac{1}{2};\ P=\frac{2}{3}$ $\qquad$ $S=\sqrt{2};\ P=2$

221 $S=\sqrt{7}-1;\ P=6$ $\qquad$ $S=a+1;\ P=a^2$

222 *Scrivi un'equazione di secondo grado che ammettte come radici le soluzioni indicate*

223 $x_1=-2;\ x_2=5$ $\qquad$ $x_1=7;\ x_2=2$

224 $x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{3}{4}$ $\qquad$ $x_1=\frac{2}{3};\ x_2=\frac{1}{3}$

225 $x_1=\sqrt{2};x_2=\sqrt{5}$ $\qquad$ $x_1=\frac{1+\sqrt{2}}{2};\ x_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

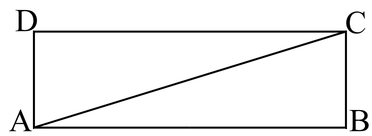
Problemi di natura geometrica di secondo grado

Problema

Determinate la misura della diagonale di un rettangolo avente il perimetro di 80m. e l'area di 375m^2.

Dati: $2\,p=80$, $A=375\,(m^2)$

Obiettivo: $\overline{AC}$?



Soluzione

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$ per il teorema di Pitagora sul triangolo *ABC*.

Sono incognite le misura dei lati, quindi poniamo $\overline{AB}=x$ e $\overline{BC}=y$ con $x>0$ e $y>0$

Il problema si formalizza con il sistema: $\begin{cases}x+y=40\\ x\cdot y=375\end{cases}$ che esprime la ricerca di due numeri nota la loro somma 40 e il loro prodotto 375. I numeri richiesti sono le soluzioni reali positive dell'equazione $t^2-40\,t+375=0$ e precisamente $t_1=15\ \vee\ t_2=25$.

Per come abbiamo disegnato la figura abbiamo quindi: $\overline{AB}=25\text{m}\,;\overline{BC}=15\text{m}$ da cui $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{850}\,m=5\sqrt{34}\,m$.

226 Determinate il perimetro del rombo avente $area=24\,(m^2)$, sapendo che la somma delle misure delle sue diagonali è $14\,(m)$.

227 Costruire i due triangoli isosceli aventi $area=120\,(m^2)$ sapendo che $31\,(m)$ è la somma delle misure della base con l'altezza.

228 Il triangolo rettangolo *ABC* ha l'ipotenusa *AC* di $40\,cm$ e l'altezza *BH* ad essa relativa di *cm19*,2. Determinate la misura delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

►10. Scomposizione del trinomio di secondo grado

Si consideri il trinomio di secondo grado: $a x^2+b x+c$ e sia $a x^2+b x+c=0$ (con $\Delta \geq 0$) l'equazione associata a tale trinomio. Effettuiamo le seguenti operazioni:

$$a x^2+b x+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) =$$

Si sostituiscono le relazioni trovate nel precedente paragrafo

$$= a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2]=$$

$$= a[x^2-x_1 x+x_2 x+x_1\cdot x_2]=$$

Si effettua il raccoglimento parziale

$$= a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)] =$$
$$= a(x-x_1)(x-x_2)$$

È quindi possibile distinguere i casi:

- I caso: $\Delta > 0$ Il trinomio di secondo grado può essere scomposto nella forma: $a(x-x_1)(x-x_2)$;
- II caso: $\Delta = 0$ Il trinomio di secondo grado può essere scomposto nella forma: $a(x-x_1)^2$;
- II caso: $\Delta < 0$ Il trinomio di secondo grado non può essere scomposto.

Discriminante	**Scomposizione**
$\Delta > 0 \rightarrow x_1 \neq x_2$	$a x^2+b x+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta = 0 \rightarrow x_1 = x_2$	$a x^2+b x+c = a(x-x_1)^2$
$\Delta < 0 \rightarrow x_{1,} x_2 \notin \mathbb{R}$	$a x^2+b x+c$ è irriducibile

Esempi

- *Scomporre in fattori* x^2-5x+6
  Applicando la formula ottenuta nel I caso si ha: $x^2-5x+6 = (x-2)(x+3)$
- *Scomporre in fattori* $x^2-12x+36$
  Applicando la formula ottenuta nel II caso si ha: $x^2-12x+36 = (x-6)^2$
- *Scomporre in fattori* $2x^2+3x+5$
  Essendo $\Delta = 9-40 = -31$, il trinomio è irriducibile.
- *Scomporre il trinomio* $-5x^2+2x+1$.

1° passo: calcolo del discriminante dell'equazione associata $-5x^2+2x+1=0$:
$\Delta=(2)^2-4(-5)(+1)=4+20=24$ positivo, quindi esistono due radici reali distinte
2° passo: calcolo le radici dell'equazione associata $-5x^2+2x+1=0$:
$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{-10}=\frac{1\pm\sqrt{6}}{5}$ quindi $x_1=\frac{1-\sqrt{6}}{5} \vee x_2=\frac{1+\sqrt{6}}{5}$

3° passo: scrivo la scomposizione: $-5x^2+2x+1 = -5\left(x-\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$

- *Scomporre il trinomio* $6x^2+x-2$

1° passo: calcolo del discriminante dell'equazione associata $6x^2+x-2=0$: $\Delta=1^2-4(-12)=49$ positivo, quindi esistono due radici reali distinte
2° passo: calcolo le radici dell'equazione associata $6x^2+x-2=0$
$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{-1\pm 7}{12}$ quindi $x_1=-\frac{2}{3} \vee x_2=\frac{1}{2}$

3° passo: scrivo la scomposizione: $6x^2+x-2 = 6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = (2x-1)(3x+2)$

■ *Scomporre il trinomio* $x^2-12x+36$

Il discriminante dell'equazione associata è $\Delta=12^2-4\cdot 36=0$; le soluzioni sono coincidenti, precisamente $x_{1,2}=\frac{+12\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{12}{2}=6$ Il polinomio si scompone $x^2-12x+36=(x-6)(x-6)=(x-6)^2$. In questo caso si poteva riconoscer facilmente il quadrato del binomio.

Attenzione

Si vuole scomporre in fattori il trinomio $p=4x^2+2x-6$, avente tutti i coefficienti pari.
Anche se osserviamo che tutti i suoi coefficienti sono pari, NON POSSIAMO DIVIDERE PER DUE, non essendo una equazione; il polinomio $p=2x^2+x-3$ è diverso da quello assegnato, mentre le equazioni associate all'uno e all'altro sono equivalenti. Nel procedere alla scomposizione possiamo usare l'equazione $2x^2+x-3=0$ le cui radici sono: $x_1=-\frac{3}{2}\vee x_2=1$, e procedere alla scomposizione del trinomio assegnato: $p=4x^2+2x-6=4\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)$

229 Scrivere un'equazione di secondo grado che ammetta le soluzioni $x_1=\frac{1}{2}$ e $x_2=3$.

In virtù di quanto visto in questo paragrafo, si ha: $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=0$ da cui: $x^2+3x-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

cioè: $x^2+5x-\frac{3}{2}=0$ ovvero: $2x^2+5x-3=0$

Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado

230 $x^2-5x-14=0$ R. $(x+2)(x-7)$

231 $2x^2+6x-8=0$ R. $2(x-1)(x+4)$

232 $-3x^2+\frac{39}{2}x-9$ R. $-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-6)$

233 $-2x^2+7x+4$

234 $4x^2+4x-15$ R. $4\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

235 $3x^2+3x-6$

236 $4x^2-9x+2$ R. $4(x-2)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

237 $2x^2+2x-\frac{3}{2}$

238 $3x^2+5x-2$ R. $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)$

239 $4x^2-24x+20$

240 $2x^2-\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$ R. $2(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)$

241 $\frac{4}{3}x^2+\frac{11}{3}x-\frac{7}{2}$

242 $3x^2-6x-12$ R. $3(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$

243 $2x^2-8x+2$

244 $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{8}$ R. $-\frac{1}{2}\left(x-1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

245 $-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x-\frac{45}{8}$ R. $-\frac{3}{4}\left(x+3-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x+3+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

►11. Regola di Cartesio

Se in un'equazione di secondo grado i coefficienti sono tutti diversi da zero e il discriminante è non negativo, è possibile avere delle informazioni sui segni delle soluzioni senza calcolarle esplicitamente.

DEFINIZIONE. In un'equazione $a x^2+b x+c=0$, dove i coefficienti sono tutti non nulli, le coppie di coefficienti *(a, b)* e *(b, c)* sono dette **coppie di coefficienti consecutivi.**
Una coppia di coefficienti consecutivi presenta:
una **permanenza** se i coefficienti hanno lo stesso segno;
una **variazione** se i coefficienti hanno segni diversi.

Esempi

	a	b	c
$+2x^2-3x-1$	$+$	$-$	$-$
		variazione	permanenza
$-x^2-3x-1$	$-$	$-$	$-$
		permanenza	permanenza
$-3x^2+4x-1$	$-$	$+$	$-$
		variazione	variazione
$+2x^2+x-1$	$+$	$+$	$-$
		permanenza	variazione

TEOREMA DI CARTESIO. In un'equazione di secondo grado $a x^2+b x+c=0$ con $a, b, c\neq 0$ e $\Delta=b^2-4ac\geq 0$, il numero di radici positive è uguale al numero di variazioni presenti nelle coppie di coefficienti consecutivi. Se vi è una sola variazione, le radici sono discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva se la variazione è nella coppia *(a,b)*, mentre è della radice negativa se la variazione è nella coppia *(b,c)*.

Cerchiamo di capire, attraverso degli esempi, perché i segni dei coefficienti dell'equazione di secondo grado completa hanno una stretta relazione con i segni delle sue soluzioni reali.

Esempio

L'equazione $x^2+2x-3=0$ *ha soluzioni reali in quanto* $\Delta=16>0$ *; dal momento che vi è una sola variazione, quello della coppia (b,c), l'equazione ha radici discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice negativa.*

Dimostriamo quanto è stato affermato tenendo presente che $x_1+x_2=-\frac{b}{a}\wedge x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$; nell'equazione proposta si ha: $x_1+x_2=-\frac{2}{1}\wedge x_1\cdot x_2=-\frac{3}{1}$ dunque prodotto negativo e somma negativa. Il prodotto di due numeri è negativo quando i fattori sono discordi, quindi una soluzione è positiva e una è negativa. Chiamiamo x_1 la soluzione negativa e x_2 la soluzione positiva, poiché $x_1+x_2=-2<0$ deduciamo che in valore assoluto è più grande il numero negativo, cioè $|x_1|>|x_2|$. Riassumendo:

$x^2+2x-3=0$	a	b	c	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$	$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$	x_1	x_2
	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
	permanenza	variazione					

Esempio

L'equazione $-x^2+5x-6=0$ *ha soluzioni reali in quanto* $\Delta=1>0$ *; dal momento che vi sono due variazioni, l'equazione ha due radici positive. Dimostra quanto è stato affermato completando la tabella e completando il ragionamento.*

$-x^2+5x-6=0$	a	b	c	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$	x_1	x_2
	……	……	……	……	……	……	……
	………	………					

Essendo il prodotto ………… e la somma ………. le due soluzioni reali sono………………… pertanto 2 ……………. → 2 soluzioni …………..

Esempi

- L'equazione $2x^2-6x-56$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta=484>0$; dal momento che vi è una sola variazione, l'equazione ha radici discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva dal momento che la variazione è nella coppia *(a,b)*.
- L'equazione $-3x^2-24x-21=0$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta=324>0$; dal momento che non vi sono variazioni, l'equazione ha due radici negative.
- L'equazione $x^2-10x+25=0$ ha due soluzioni coincidenti in quanto $\Delta=0$; dal momento che vi sono due variazioni, le due radici coincidenti sono positive.

Determina il segno delle soluzioni di ogni equazione senza risolverla, dopo aver verificato che $\Delta \geq 0$

246 $x^2-5x+6=0$

247 $-x^2+x+42=0$

248 $x^2+x-20=0$

249 $3x^2+2x-1=0$

250 $2x^2-\sqrt{5}x-1=0$

251 $3x^2+5x+1=0$

252 $-x^2-x+1=0$

253 $-5x+1-x^2=0$

254 $-1-x^2-2x=0$

255 $1+x+2x^2=0$

256 $x^2-4\sqrt{2}x+2=0$

257 $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{8}$

►12. Equazioni parametriche

DEFINIZIONE. Si definisce **parametrica** un'equazione i cui coefficienti dipendono da un parametro.

L'equazione $3x^2+(k-1)x+(2-3k)=0$ è parametrica di secondo grado nell'incognita x; i suoi coefficienti dipendono dal valore assegnato al parametro k e quindi la natura e il segno delle sue soluzioni dipendono da k.
In molti problemi di applicazione della matematica in situazioni reali in cui compare un parametro, non interessa tanto determinare le soluzioni dell'equazione che formalizza il problema, quanto sapere se le soluzioni hanno determinate caratteristiche.
Sappiamo che attraverso i coefficienti di un'equazione di secondo grado si possono determinare alcune relazioni tra le sue soluzioni:

- si hanno soluzioni reali se $\Delta=b^2-4ac\geq 0$;
  - reali coincidenti se $\Delta=b^2-4ac=0$,
  - reali distinte se $\Delta=b^2-4ac>0$
- la somma delle soluzioni è $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ e il prodotto delle soluzioni è $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

Nell'equazione precedente si ha $\Delta=(k-1)^2-12(2-3k)$ dipendente dal parametro k.

Dall'analisi del Δ si potranno dedurre quali condizioni deve verificare k affinché esistano soluzioni reali;
Dall'analisi di somma e prodotto $x_1+x_2=-\dfrac{(k-1)}{3}$ *;* $x_1\cdot x_2=\dfrac{(2-3k)}{3}$ potremo stabilire il segno delle soluzioni reali.

258 Assegnata l'equazione $(k+1)x^2+(2k+3)x+k=0$ stabilire per quale valore di k

a) L'equazione si riduce al primo grado.
b) L'equazione ammette soluzioni reali; distinguere i casi "soluzioni coincidenti" e "soluzioni distinte".
c) La somma delle soluzioni sia nulla; determina in tal caso le soluzioni.

Svolgimento guidato

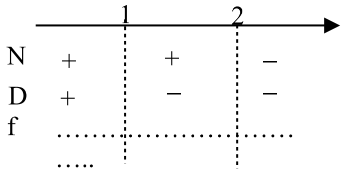
a) l'equazione diventa di primo grado se il coefficiente a si annulla $a=k+1 \rightarrow k=\ldots\ldots$; in questo caso si ha l'equazione ……………… di primo grado, da cui $x=\ldots\ldots\ldots$
b) studiamo il segno del discriminante: $\Delta=(2k+3)^2-4k(k+1)=\ldots\ldots\ldots\ldots\geq 0$ da cui ricaviamo
   - se $k=-\dfrac{9}{8}$ le soluzioni sono ………… e $x_1=x_2=\ldots\ldots$
   - se $k>-\dfrac{9}{8}$ le soluzioni sono ……………… .
c) dalla formula ricaviamo $x_1+x_2=-\dfrac{(2k+3)}{(k+1)}$ e quindi ponendo $(2k+3)=\ldots\ldots$ si ha somma nulla se $k=\ldots\ldots$; somma nulla equivale ad annullare il secondo coefficiente, quindi le soluzioni sono ……… ; in questo caso sono reali? Perché?

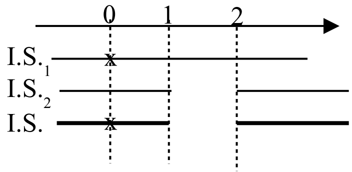
259 Assegnata l'equazione $(1-k)x^2+(k-2)x+1=0$, stabilire i valori da assegnare al parametro affinché le soluzioni reali distinte abbiano la somma positiva.

Svolgimento guidato

Nel testo del problema vi sono due richieste: a) le soluzioni siano reali distinte e b) abbiano somma positiva.

Il problema si formalizza attraverso il sistema $\begin{cases}\Delta>0\\ -\dfrac{b}{a}>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(k-2)^2-4(1-k)>0\\ -\dfrac{k-2}{1-k}>0\end{cases}$; risolviamo la prima disequazione: $d_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0 \rightarrow k^2>0 \rightarrow I.S._1=\{k\in\mathbb{R}\mid k\neq 0\}$ e la seconda d_2 cercando il segno del numeratore e del denominatore: $\begin{cases}N: -k+2>0 \rightarrow k<2\\ D: 1-k>0 \rightarrow k<1\end{cases}$ da cui con la tabella dei segni ricaviamo $I.S._2=\{k\in\mathbb{R}\mid k\ldots\ldots\ldots \vee k>\ldots\ldots\ldots\}$.





Dal grafico ricava $I.S.=I.S._1 \cap I.S._2=\{k \in \mathbb{R} \mid k \ldots\ldots\ldots \vee 0<k<\ldots\ldots \vee k\ldots\ldots\ldots\}$

260 Assegnata l'equazione $(k+1)x^2+(k+3)x+k=0$ stabilire per quale valore di k una sua soluzione è $x=-1$. In tale caso determinare l'altra soluzione.

Traccia di svolgimento

Ricordiamo che un valore numerico è soluzione di un'equazione se sostituito all'incognita trasforma l'equazione in una uguaglianza vera. Per questo motivo, sostituendo all'incognita il valore fissato, il parametro k dovrà verificare l'uguaglianza: $(k+1)(-1)^2+(k+3)(-1)+k=0 \rightarrow$ ....

Sostituendo il valore di k trovato, l'equazione diventa: $3x^2+5x+2=0$; l'altra soluzione può essere trovata o con la formula risolutiva, oppure ricordando che $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{5}{3} \rightarrow x_2=$ .... o anche $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{2}{3} \rightarrow x_2=$ ....

261 Giustificare la verità della seguente proposizione: "per qualunque valore assegnato al parametro m l'equazione $(m-1)^2+2mx+m+1=0$ ha soluzioni reali distinte".

Determinare m affinché: $a)\, x_1+x_2=1-\sqrt{3}$; $b)\, x_1 \cdot x_2=\frac{12}{5}$; $c)\, x_1+x_2=1-x_1 \cdot x_2$

262 Nell'equazione $7x^2+(k-5)x-(k+2)=0$ determinare k affinché le soluzioni siano reali; distingui i casi "reali coincidenti" e "reali distinte".

Nel primo caso determina $x_1=x_2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; nel secondo caso, determina k affinché

- Il prodotto delle soluzioni sia $-\frac{8}{3}$.
- Una soluzione sia nulla.
- Le soluzione siano una il reciproco dell'altra, cioè: $x_1=\frac{1}{x_2}$.
- La somma dei reciproci delle soluzioni sia $\frac{1}{2}$.
- La somma delle soluzioni superi il loro prodotto di 2.

263 Verificare che nell'equazione $(2m-3)x^2-(m+2)x+3m-2=0$ si hanno due valori del parametro per cui le soluzioni sono reali coincidenti. Determina i due valori.

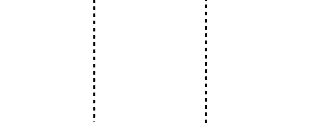
264 Nell'equazione $x^2-2(k+2)x+(k^2-3k+2)=0$ determinare k affinché le soluzioni siano reali, con somma positiva e prodotto negativo.

Traccia di svolgimento: Il problema richiede tre condizioni alle quali deve soddisfare contemporaneamente il parametro, pertanto si formalizza con il sistema $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{a}>0 \\ \frac{c}{a}<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4(k+2)^2-4(k^2-3k+2) \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots<0 \end{cases}$; da cui

$d_1: \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \geq 0 \rightarrow I.S._1=\ldots\ldots\ldots$

$d_2: \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0 \rightarrow I.S._2=\ldots\ldots\ldots$

$d_3: (k-2)(k-1)<0$ da cui la tabella dei segni



e $I.S._3=\ldots\ldots\ldots$

265 $x^2-2x-k=0$ determinare k in modo che
- le soluzioni siano reali e distinte (Δ>0) R. $[k>-1]$
- la somma delle soluzioni sia 10 $(x_1+x_2=10)$ impossibile
- il prodotto delle soluzioni sia 10 $(x_1\cdot x_2=10)$ R. $[k=-10]$
- una soluzione sia uguale a 0 (sostituire 0 alla x) R. $[k=0]$
- le radici siano opposte $(x_1+x_2=0)$ impossibile
- le radici siano reciproche $(x_1\cdot x_2=1)$ R. $[k=-1]$
- le radici siano coincidenti (Δ=0) R. $[k=-1]$
- la somma dei quadrati delle radici sia 12 $(x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=12)$ R. $[k=4]$
- la somma dei reciproci delle radici sia -4 $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-4\right)$ R. $\left[k=\frac{1}{2}\right]$
- la somma dei cubi delle radici sia 1

  $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=1$ R. $\left[k=-\frac{7}{6}\right]$
- le radici siano entrambe negative $\begin{cases} x_1\cdot x_2>0 \\ x_1+x_2<0 \end{cases}$ R. $k<0$

266 $x^2-kx-1=0$ determinare k in modo che
- le soluzioni siano coincidenti impossibile
- la somma delle radici sia 8 R. $[k=8]$
- le radici siano opposte R. $[k=0]$
- una radice sia $-\frac{1}{3}$ R. $\left[k=\frac{8}{3}\right]$
- Il prodotto delle radici sia -1 R. $[\forall k\in\mathbb{R}]$

267 $x^2+(k+1)x+k=0$ determinate k affinché
- una soluzione sia uguale a zero R. $[k=0]$
- abbia soluzioni opposte R. $[k=-1]$
- non abbia soluzioni reali impossibile
- le radici siano reciproche R. $[k=1]$
- Le radici siano positive (regola di Cartesio) R. [k<-1 o k>0]

268 $x^2-kx+6=0$ determinate k affinché
- la somma delle radici sia 7 R. $[k=7]$
- le radici siano reali e opposte impossibile
- la somma dei reciproci delle radici sia -6 R. $[k=-36]$
- una radice sia $-\frac{3}{2}$ R. $\left[k=-\frac{11}{2}\right]$

269 $x^2+(k+1)x+k^2=0$ determinare k affinché
- abbia come soluzione -1 R. $[k=0;1]$
- abbia una soluzione doppia ($x_1=x_2$) R. $\left[k=1;-\frac{1}{3}\right]$
- le radici siano reciproche R. $[k=\pm 1]$
- una radice sia l'opposto della reciproca dell'altra impossibile
- una radice sia nulla R. [k=0]

270 $kx^2-2kx+k-2=0$ determinare k affinché
- una radice sia nulla R. $[k=2]$
- la somma dei reciproci delle radici sia 1 R. $[k=-2]$
- la somma dei quadrati delle radici sia 4 R. $[k=2]$
- la somma delle radici superi di 5 il loro prodotto R. $\left[k=\frac{1}{2}\right]$

271 $x(x-a)=\frac{a+x}{a+2}$ determinate a affinché

- una soluzione sia 1 R. $[a=-1\pm\sqrt{2}]$
- l'equazione sia di primo grado R. impossibile
- una soluzione sia uguale al reciproco dell'altra R. $[a=-1]$
- la somma delle soluzioni sia il doppio del loro prodotto R. $\left[\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}\right]$
- la somma dei quadrati delle soluzioni sia 0 R.impossibile
- la somma delle radici sia l'opposto del loro prodotto R. $\left[\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right]$
- le soluzioni siano reali e distinte
- l'equazione sia spuria
- la somma dei cubi delle soluzioni sia nulla
- le soluzioni siano reali e discordi
- la somma dei reciproci dei cubi sia 1

272 $kx^2-(2k+1)x+k-5=0$ determinare il valore di k per il quale

- l'equazione ha soluzioni reali R. $k\geq-\frac{1}{24}$
- il prodotto delle radici sia -2 R. $k=\frac{5}{3}$
- la somma delle radici sia 1 R. k=-1 non accettabile
- una soluzione sia -2 R. $k=\frac{1}{3}$
- le soluzioni siano opposte R. $k=-\frac{1}{2}$ non accettabile
- la somma dei reciproci sia 3 R. k=16
- le soluzioni siano reciproche impossibile
- una soluzione sia l'opposto del reciproco dell'altra
- la somma dei quadrati delle soluzioni sia 4 R. $k=\frac{(7\pm\sqrt{(51)})}{2}$
- le radici siano concordi R. $-\frac{1}{24}\leq k<0\vee k>5$
- le radici siano entrambe negative R. $-\frac{1}{2}<k<0$
- la somma delle radici uguagli l'opposto del loro prodotto

273 Per quale valore di $k\in\mathbb{R}$ l'equazione $kx^2-x+k=0$ non ammette soluzioni reali?

274 Per quale valore di $k\in\mathbb{R}$ l'equazione $x^2+(k-2)x+1=0$ ammette due soluzioni reali e distinte?

275 Per quale valore di *k* l'equazione $(k-1)x^2+kx+(k+1)=0$ ha una soluzione nulla?

[A] $k=1$ [B] $k=-1$ [C] $k=0$ [D] nessun valore di k

276 Per quale valore di *k* l'equazione $kx^2+\frac{1}{2}x+1=0$ ha due soluzioni identiche?

[A] $k=\frac{1}{4}$ [B] $k=\frac{1}{16}$ [C] $k=2$ [D] nessun valore di k

277 Per quale valore di *k* l'equazione $(k+3)x^2-2x+k=0$ ammette due soluzioni reciproche?

[A] $k=0$ [B] $k=-3$ [C] qualsiasi [D] nessun valore di k

278 Per quale valore di k l'equazione $(k+1)x^2-kx-4=0$ ha una soluzione uguale a 2?

[A] k=4 [B] k=-2 [C] k=0 [D] k=-1

279 Se l'equazione $(k+1)x^2-kx-4=0$ ha una soluzione uguale a 2 quanto vale l'altra soluzione?

[A] $x=0$ [B] $x=-2$ [C] $x=\frac{1}{2}$ [D] $x=2$

►13. Problemi di secondo grado in una incognita

La risoluzione dei problemi … serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose. (R. Descartes)

Sappiamo che nel corso degli studi o nell'attività lavorativa possono presentarsi problemi di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale; possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze presenti nel problema e quando si può costruire, tramite queste relazioni, un modello matematico che ci permetta di raggiungere la soluzione al quesito posto dalla situazione problematica.
Affronteremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di secondo grado in una sola incognita.
Teniamo presente, prima di buttarci nella risoluzione del problema, alcuni passi che ci aiuteranno a costruire il modello matematico:

- la lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
- la scelta della grandezza incognita del problema, la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, le condizioni che devono essere soddisfatte dall'incognita;
- la traduzione in "forma matematica" delle relazioni che intercorrono tra i dati e l'obiettivo, cioè l'individuazione del modello matematico (equazione risolvente).

Dopo aver risolto l'equazione occorre confrontare la soluzione trovata con le condizioni poste dal problema.

Problema 1

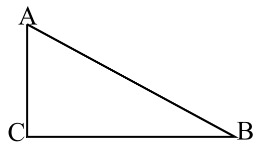
Nel triangolo rettangolo ABC, rettangolo in C l'ipotenusa supera il cateto maggiore CB di 2m; la differenza tra i cateti è 23m. Determinare la misura del perimetro e l'area di ABC.

Dati

$\overline{AB}=\overline{CB}+2$
$\overline{CB}-\overline{AC}=23$
$A\hat{C}B=retto$

Obiettivo

$?\,2p$
$?\,Area$



Strategia risolutiva. Osserva che $2p=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$; $Area=\dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{2}$

Poni $\overline{BC}=x$ dai dati si ha $\begin{array}{l}\overline{AB}=x+2\\ \overline{AC}=x-23\end{array}$ con $\begin{cases} x>0 & \text{essendo misura di un segmento}\\ x>23 & \text{poiché } \overline{AC} \text{ deve essere positiva}\end{cases}$

Essendo il triangolo rettangolo, i lati sono legati dal teorema di Pitagora quindi si deve verificare:
$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 \rightarrow (x+2)^2=(x-23)^2+x^2$. L' equazione risolvente di secondo grado, in forma canonica: $x^2-50x+525=0$ con $\Delta=400$. L'equazione è determinata con il discriminante positivo, quindi esistono due soluzioni reali distinte: $x_1=15 \vee x_2=35$ entrambe positive. Ai fini del problema x_1 non è accettabile, quindi il problema ha una sola soluzione e $\overline{BC}=35$; $\overline{AB}=37$; $\overline{AC}=12$
Conclusione: $2p=35+37+12=84\,(m)$; $Area=210\,(m^2)$

Problema 2

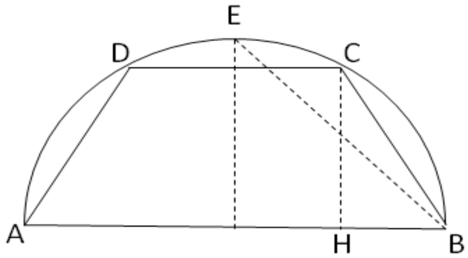
Un padre aveva 26 anni alla nascita del figlio; moltiplicando le età attuali del padre e del figlio si trova il triplo del quadrato dell'età del figlio; calcolare le due età.

Indichiamo con p l'età attuale del padre e con f l'età del figlio
Dati: $p=f+26$; $p\cdot f=3f^2$ Obiettivo: $?\,f$; $?\,p$
Strategia risolutiva: I dati permettono di impostare la relazione $(f+26)\cdot f=3\cdot f^2$ che esprime il legame tra le età di oggi del padre e del figlio; siamo di fronte ad un'equazione di secondo grado nell'incognita f .
La soluzione dell'equazione deve essere espressa da un numero positivo poiché esprime l'età.
Risolviamo: $2f^2-26f=0$ le cui soluzioni sono $f_1=0 \vee f_2=13$. Per le condizioni poste la soluzione del problema è $f=13$.
Risposta: Oggi il figlio ha 13 anni e il padre 39 anni.

Problema 3

Il trapezio isoscele ABCD è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB di misura 25cm; determina le *misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è 62cm.*

Dati	Obiettivo
$\overline{AB}=25$	
$2\ p=62$	$?\ \overline{DC}$
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	$?\ \overline{CB}$
$\overline{AD}=\overline{CB}$	



Strategia risolutiva:

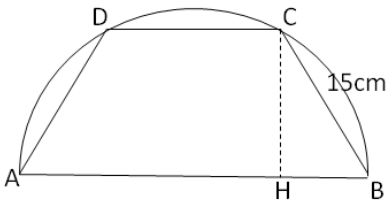
$\overline{AB}+\overline{DC}+2\ \overline{BC}=62$; fissiamo come incognita la misura in cm di BC: $\overline{BC}=x$

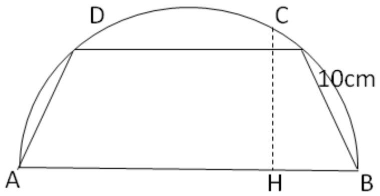
Determiniamo le condizioni sull'incognita: dovrà essere $x>0$ poiché rappresenta la misura di un segmento e inoltre affinché esista realmente il trapezio isoscele il punto C non deve coincidere con il punto medio E dell'arco DC, quindi $x<\frac{25}{2}\sqrt{2}$

Tracciata l'altezza $CH\ (H\in AB)$ si ha $\overline{DC}=\overline{AB}-2\ \overline{HB}$ e per il 1° teorema di Euclide sul triangolo ACB , rettangolo in C , $\overline{HB}:\overline{CB}=\overline{CB}:\overline{AB}$; determiniamo quindi la misura di HB in funzione dell'incognita fissata: $\overline{HB}=\frac{x^2}{25}$ da cui $\overline{DC}=25-\frac{2\ x^2}{25}$

Costruiamo l'equazione risolvente: $25+2\ x+25-\frac{2\ x^2}{25}=62\ \rightarrow\ x^2-25\ x+150=0$ che ha soluzioni reali perché ……………… entrambe positive perché …………………………

Si ottiene $x_1=10\ \vee\ x_2=15$, entrambe accettabili. Si hanno dunque due trapezi inscritti:





Problema 4

Un capitale di 25000 € viene depositato in banca a un tasso di interesse annuo c. Gli interessi maturati durante il primo anno non vengono ritirati. Nell'anno seguente si investono sia il capitale sia gli interessi maturati a un tasso di interesse annuo aumentato dello 0,5%. Alla fine dei due anni si ritira la somma di 26291,10 €. Calcola i tassi di interesse praticati dalla banca.

Svolgimento. Assumiamo come variabile c il tasso di interesse praticato il primo anno, espresso come numero decimale e non in forma percentuale. Il tasso praticato nel secondo anno sarà c+0,05.

Alla fine del primo anno in banca rimane tra capitale e interessi $25000+25000\cdot c=25000(1+c)$. Nel secondo anno il tasso praticato è c+0,005 che va applicato alla somma 25000(1+c).

Si ottiene quindi l'equazione $25000(1+c)(1+c+0{,}005)=26291{,}10$

Risolvo l'equazione

$25000(1+c)(1{,}005+c)=26291{,}10$ moltiplicando tra le parentesi tonde si ha

$25000(1{,}005+c+1{,}005c+c^2)=26291{,}10$ dividendo per 25000 primo e secondo membro

$1{,}005+c+1{,}005c+c^2=\frac{26291{,}10}{25000}$ riscrivendo in ordine l'equazione si ha

$c^2+2{,}005c-0{,}046644$ applico la formula risolutiva

$$c_{1,2}=\frac{-2{,}005\pm\sqrt{4{,}020025+0{,}186576}}{2}=\frac{-2{,}005\pm 2{,}051}{2}\qquad c_1=-2{,}028\qquad c_2=0{,}023$$

La soluzione c_1 è negativa e non è accettabile.

La risposta al problema è 0,023 cioè 2,3% il primo anno e 2,8% il secondo anno.

280 Il quadrato di un numero reale supera la metà del numero stesso di 5. Determina i numeri reali che rendono vera la proposizione enunciata. [-2; 5/2]

281 Il prodotto della metà di un numero relativo con il suo successivo è 666. Quali numeri verificano questa proprietà? [36; -37]

282 Trova un numero positivo che addizionato al proprio quadrato dia come somma 156.

283 Un numero addizionato al quadrato della sua metà, dà come risultato 120. Trova il numero.

284 Verifica che non esiste alcun numero reale tale che il quadrato del suo doppio uguagli la differenza tra il triplo del suo quadrato e il quadrato della somma del numero con 3.

285 Due numeri naturali hanno rapporto 2/3 e somma dei loro quadrati 3757. Individua i numeri che verificano questa proprietà. [51, 34]

286 La somma dei quadrati di due numeri pari consecutivi è 580. Quali sono i due numeri?[16; 18]

287 Di due numeri naturali consecutivi si sa che la somma dei loro reciproci è 9/20. Quali sono i due numeri? [4: 5]

288 Di cinque numeri interi consecutivi si sa che la differenza tra il quadrato della somma degli utlimi due numeri e la somma dei quadrati dei primi tre è 702. Qual è il più piccolo di questi numeri? [17]

289 * La somma delle età di un padre con quella del figlio è 38. Sapendo che l'età del padre aumentata di 4 anni dà il quadrato dell'età del figlio, trovare le due età.

290 * Determina due numeri sapendo che la somma tra il doppio del minore ed il triplo del maggiore è 84 e che il rapporto tra la loro somma e il loro prodotto è 2/15.

291 * In una frazione il numeratore supera di 1 il doppio del denominatore. Determina la frazione sapendo che il numeratore e il denominatore sono numeri naturali e che essa è equivalente a un'altra frazione il cui numeratore supera di 4 il triplo del denominatore della prima frazione e il cui denominatore supera di 2 il denominatore della prima frazione. [5/2]

292 * Trova l'età di una persona sapendo che fra due anni la sua età sarà uguale al quadrato della quarta parte dell'età che aveva tre anni fa. [23]

293 * Trova tre numeri che siano multipli interi consecutivi di 3 e tali che la somma del quadrato del minore con il prodotto degli altri due sia 414. [12; 15; 18]

294 * Trova due numeri positivi sapendo che il primo supera di 2 la terza parte del secondo e che il quadrato del primo supera di 4 la quinta parte del quadrato del secondo. [7; 15]

295 * Decomponi 15 in due parti in modo che la somma dei loro quadrati sia 113. [8; 7]

296 * In una frazione il numeratore e il denominatore hanno somma 10, mentre la somma dei loro quadrati è 58. Qual è la frazione? [3/7 e 7/3]

297 Due navi partono contemporaneamente da uno stesso porto e arrivano alla stessa destinazione dopo aver percorso sulla stessa rotta a velocità costante 720 miglia. Sapendo che una delle due navi viaggia con una velocità di 1 nodo (1 miglio all'ora) superiore a quella dell'altra nave e che perciá arriva 3 ore prima a destinazione, determina le velocità in nodi delle due navi. [15; 16]

298 Due navi che viaggiano su rotte perpendicolari a velocità costante si incontrano in mare aperto. Sapendo che una delle navi viaggia a 15 nodi (1 nodo = 1 miglio all'ora), dopo quanto tempo le due navi si trovano alla distanza di 40 miglia?

299 Luca e Carlo bevono due aranciate in bottiglia. Nel tempo in cui Luca beve 11 sorsi, Carlo ne beve 8, ma due sorsi di Carlo equivalgono a tre di Luca. Poiché quando Carlo inizia a bere Luca ha già preso 4 sorsi, dopo quanti sorsi di Carlo le due bibite hanno lo stesso livello?

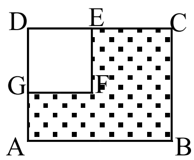
300 Un maratoneta durante una llenamento fa due giri di un percorso di 22 km mantenendo in ciasscun giro una velocità costante ma nel secondo giro la velocità è inferiore di 0,5 km/h rispetto al primo giro. A quali velocità a corso se ha impiegato complessivamente 2 ore e un quarto?

301 Un capitale di 1200 € è depositato in banca a un certo tasso di interesse annuale. Alla scadenza del primo anno gli interessi maturati vengono ridepositati sullo stesso conto. Alla scadenza del secondo anno si ritira la somma di 12854,70 euro. Qual è stato il tasso di interesse? [3,5%]

302 In un rettangolo, se si aumenta di 2 metri la base e si riduce di un metro l'altezza, la sua area aumenta di 4 metri quadrati. Se invece si riduce di un metro la base e si aumenta di 2 metri l'altezza, l'area aumenta di 22 metri quadrati. Quali sono le dimensioni del rettangolo?

303 Una ditta spende mensilmente 73500 in stipendi per i propri dipendenti. Aumentando di 5 il numero dei dipendenti, ma riducendo l'orario di lavoro, diminuisce a ciascuno lo stipendio di 200 e spende solamente 2500 in più per gli stipendi. Quanti dipendenti aveva inizialmente la ditta e quanto guadagnava ognuno di essi? [35, 2100]

304 Da un cartoncino rettangolare (ABCD, come in figura) si vuole ritagliare un quadrato (DEFG) in modo che le due parti ottenute siano equivalenti. Determinare la misura del



lato del quadrato sapendo che $\overline{EC}=6\,cm$ e $\overline{AG}=4\,cm$. $[\overline{DE}=12\text{cm}]$

305 Un terreno a forma rettangolare di 6016m^2 viene recintato con un muro lungo 350m. Quali sono le dimensioni del rettangolo? [47; 128]

306 Determinare sul segmento AB di misura 5m un punto P tale che il rettangolo delle due parti sia equivalente al quadrato di lato 2m. Rappresenta con un disegno le situazioni soluzione. [1cm; 4cm]

307 Calcolare perimetro e area del triangolo ABC isoscele sulla base AB sapendo che la differenza tra la base e l'altezza ad essa relativa è m.0,5 e tale è anche la differenza tra il lato CB e la base stessa. [2p=25m; A=30m^2]

308 La superficie del rettangolo ABCD supera di m^{2}119 la superficie del quadrato costruito sul lato minore AD. Determinare il perimetro e la misura della diagonale sapendo che i 7/10 del lato maggiore AB sono uguali ai 12/5 del lato minore. [2p=62m; d=25m]

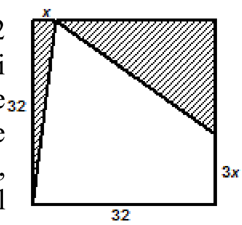
309 Nel trapezio rettangolo ABCD, il rapporto tra la base maggiore AB e la minore CD è 8/5, il lato obliquo forma con AB un angolo di 45°.Determinare il perimetro sapendo che l'area è 312 m^2. $[2p=64+12\sqrt{2}]$

310 Determina il perimetro di un rombo che ha l'area di 24m^2 e il rapporto tra le diagonali 4/3. [40m]

311 Un rettangolo ABCD ha il perimetro di 48cm e l'area di 128cm^2. A una certa distanza x dal vertice A sui due lati AD e AB si prendono rispettivamente i punti P e Q. Alla stessa distanza x dal vertice C sui lati CB e CD si prendono rispettivamente i punti R e S. Sapendo che il rapporto tra l'area del rettangolo ABCD e l'area del quadrilatero PQRS è 32/23 calcola la distanza x. [6cm]

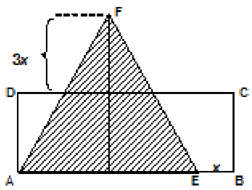
312 Un trapezio rettangolo ha la base minore di 9cm, l'altezza i 2/9 della base maggiore e l'area di $20+9\sqrt{2}\,cm^2$. Determina la misura della base maggiore. $[3\sqrt{2}]$

313 Da un quadrato di 32 cm di lato vengono ritagliati due triangoli rettangoli come descritti in figura dalla parte colorata. Calcola la misura di x, inferiore alla metà del lato del quadrato, in modo che l'area totale dei due triangoli evidenziati sia pari a 344 cm^2.



$$\left[\frac{32}{2}x+\frac{(32-x)(32-3x)}{2}=344 \;\rightarrow\; x=4\text{cm}\right]$$

314 Il rettangolo ABCD ha l'area di 240 cm2 e l'altezza AD di 12 cm. Si vuole trasformare il rettangolo in un triangolo AEF allungando l'altezza di una quantità 3x e accorciando la base di una quantità x (vedi figura) in modo che il nuovo triangolo AEF che abbia l'area di 162 cm^2. [x=2; la soluzione x=14 non è accettabile]



315 Il rettangolo AEFG ha l'area di 768 cm^2 e l'altezza AG di 24 cm. Si vuole allungare l'altezza di una quantità x e accorciare la base di una quantità doppia 2x in modo da ottenere un secondo rettangolo ABCD che abbia l'area di 702 cm^2. Determina la quantità x. [3cm]

316 Il rettangolo ABCD ha l'area di 558 cm^2 e il lato DC di 18 cm. Lo si vuole trasformare in un nuovo rettangolo AEFG accorciando l'altezza di una quantità 5x e allungando la base di una quantità 4x in modo che il nuovo rettangolo AEFG che abbia l'area di 228 cm^2. Determina la quantità x necessaria a compiere la trasformazione richiesta. [5]

317 Un trapezio isoscele di area 144cm^2 ha la base maggiore che supera di 10cm la base minore che a sua volta supera di 10cm l'altezza. Determina il perimetro del trapezio.

318 La piramide di Cheope è ha base quadrata ed ha una superficie totale pari a 135700 m^2. Sapendo che l'apotema della piramide è pari a 180 metri, si calcoli la lunghezza del lato di base. [230 m]

319 Un container a forma di parallelepipedo a base quadrata ha una superficie totale pari a 210 m^2. L'altezza è il doppio del lato di base diminuita di 2 metri. Trovare la lunghezza del lato di base. [5m]

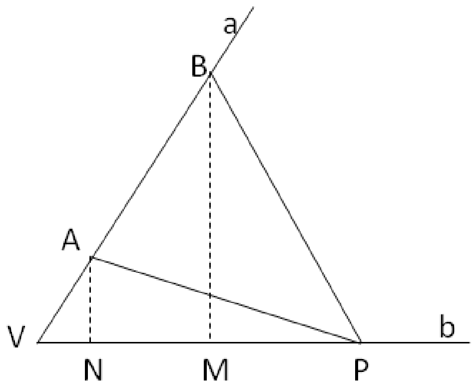
Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 98; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

Problemi con un parametro

I problemi che abbiamo proposto sono caratterizzati da dati numerici e di conseguenza le soluzioni numeriche dell'equazione risolvente sono facilmente confrontabili con le condizioni poste sull'incognita. Abbiamo anche visto che le soluzioni dell'equazione non sono sempre anche soluzioni del problema e d'altro canto può succedere che il problema abbia due soluzioni.
Affrontiamo ora un problema letterale, nel quale alcuni dati sono espressi da lettere. In questi problemi dovremo rispettare le condizioni poste sull'incognita, ma anche analizzare per quali valori della lettera il problema ammette soluzioni reali. Dovremo quindi procedere con la discussione dell'equazione parametrica risolvente per stabilire se il problema letterale ammette soluzioni.

Problema 1

Sul lato a *dell'angolo* $a\hat{V}b=60°$ *si fissano i punti A e B tali che* $\overline{VA}=2k$ e $\overline{VB}=8k$.
Determina sul lato b *un punto* P *in modo che il rapporto tra* PB *e* PA *sia 2.*

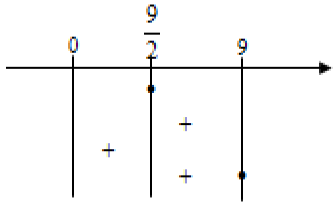
Dati	Obiettivo	Figura
$a\hat{V}b=60°$ $\overline{VA}=2k$ $\overline{VB}=8k$	$?\,P\in b$ tale che $\frac{PB}{PA}=2$	

Osservazione preliminare: le misure dei segmenti *VA* e *VB* sono espresse in forma letterale, affinché il problema abbia significato deve essere $k>0$.
Strategia risolutiva:
La posizione del punto *P* sul lato *b* sarà individuata dalla distanza di *P* da *V*: poniamo quindi $\overline{VP}=x$ con $x>0$ e determiniamo $\overline{PB}$ e $\overline{PA}$ in funzione di *x* per poter sfruttare la richiesta contenuta nell'obiettivo come equazione risolvente.
Sia *M* il piede della perpendicolare da *B* al lato *b*; nel triangolo rettangolo *PMB* si ha $\overline{PB}^2=\overline{BM}^2+\overline{PM}^2$ (*) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo *BVM*, rettangolo in *M* con l'angolo *V* di 60° si ha $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BV}\cdot\sqrt{3}=4k\cdot\sqrt{3}$ *;* $\overline{PM}=\overline{VP}-\overline{VM}$ e $\overline{VM}=\frac{1}{2}\overline{VB}=4k$; per quanto detto sul triangolo *BVM*, quindi $\overline{PM}=x-4k$; sostituendo in (*) si ottiene $\overline{PB}^2=48k^2+(x-4k)^2$.
Sia *N* il piede della perpendicolare da *A* al lato *b*; nel triangolo rettangolo *PNA*. Con analogo ragionamento otteniamo: $\overline{PA}^2=\overline{AN}^2+\overline{PN}^2$ (**) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo *AVN*, rettangolo in *N* con l'angolo *V* di 60° si ha $\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AV}\cdot\sqrt{3}=k\cdot\sqrt{3}$ e $\overline{VN}=\frac{1}{2}\overline{AV}=k$ *;* $\overline{PN}=\overline{VP}-\overline{VN}=x-k$; sostituendo in (**) si ottiene $\overline{PA}^2=3k^2+(x-k)^2$.
Determiniamo l'equazione risolvente ricordando che il rapporto tra due segmenti è uguale al rapporto tra le rispettive misure ed elevando al quadrato si ha $\frac{\overline{PB}^2}{\overline{PA}^2}=4$. Sostituendo quanto trovato si ha l'equazione $48k^2+(x-4k)^2=4\cdot\left[3k^2+(x-k)^2\right]$ da cui $x^2=16k^2$. Si tratta di un'equazione di secondo grado pura, avente due soluzioni reali opposte essendo il secondo membro positivo, quindi $x_1=-4k \vee +4k$ e per le condizioni poste solo x_2 è accettabile.
Con quale punto della figura tracciata inizialmente viene a coincidere il punto P che risolve il problema?

320 Sul prolungamento dei lati *AB*, *BC*, *CD*, *DA* del quadrato *ABCD* prendi rispettivamente i punti *Q*, *R*, *S*, *P* in modo che *QB=RC=SD=PA*. Dimostra che *PQRS* è un quadrato; nell'ipotesi che sia $\overline{AB}=3\text{m}$ determina $\overline{AP}$ in modo che l'area di *PQRS* sia *k*, con *k* reale positivo.

Traccia dello svolgimento

Per dimostrare che PQRS è un quadrato dobbiamo dimostrare che i lati sono …………………… e che gli angoli sono ……….



Ipotesi: ……………………

Tesi: …………………..

Poni $\overline{AP}=x$ con $x>0$

$Area_{PQRS}=\overline{PQ}^2=\overline{PA}^2+\overline{AQ}^2$ per il teorema di Pitagora in ………..

Verifica che si ottiene l'equazione risolvente $2x^2+6x+(9-k)=0$.

Poiché vogliamo soluzioni reali positive, discuti l'equazione con il metodo di Cartesio. Il discriminante è … … Verifica che l'equazione ammette soluzioni reali per $k\geq\frac{9}{2}$. Analizza il segno dei coefficienti e completa il grafico.

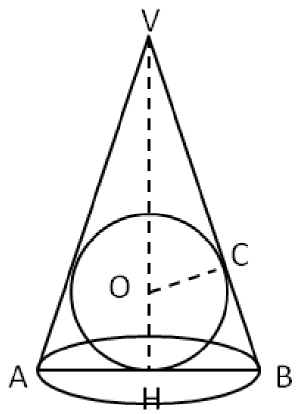
321 Nel trapezio rettangolo ABCD di base maggiore BC, la diagonale AC è bisettrice dell'angolo $B\hat{C}D$. Posto $\overline{AB}=1m$, determina la base maggiore in modo che sia 2k il perimetro del trapezio.

Disegna la figura, i dati e l'obiettivo del problema.

Traccia dello svolgimento

Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente congruenti, allora sono simili e i lati omologhi sono in proporzione. Poniamo $\overline{BC}=x$ con x……… . Dall'informazione che la diagonale *AC* è bisettrice dell'angolo $B\hat{C}D$, possiamo dimostrare che *ADC* è un triangolo isoscele sulla base AC. L'equazione risolvente sarà determinata dalla relazione tra i lati che esprime il perimetro del trapezio: $2p=\overline{AC}+\overline{BC}+\ldots\ldots\ldots\ldots=2k$. Dobbiamo quindi esprimere $\overline{DC}$ in funzione di *x*. Traccia l'altezza *DH* del triangolo isoscele *ADC* e dopo aver dimostrato la similitudine di *ABC* con *DHC*, verifica che si ottiene $\frac{1}{2}\overline{AC}^2=\overline{DC}\cdot\overline{BC}$ da cui si può ricavare la misura di DC. Per completare gli elementi nell'equazione risolvente, calcola $\overline{AC}^2$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo *ABC*. L'equazione parametrica risolvente è $2x^2+x\cdot(1-2k)+1=0$ con $x>0$; può essere discussa con il metodo di Cartesio.

322 Ad una sfera di raggio *1m* è circoscritto un cono il cui volume è *k* volte il volume della sfera. Determina l'altezza del cono.

Dati	Obiettivo	Figura
$\overline{OC}=1$ $\overline{OC}=\overline{OH}$ $\overline{OC}\perp\overline{VB}$ $\overline{BC}=\overline{BH}$ $\overline{AH}=\overline{HB}$ $\overline{VH}\perp\overline{AB}$ $Volume_{cono}=k\cdot Volume_{sfera}$	? $\overline{VH}$	

Poniamo $\overline{VO}=x$ con $x>0$ da cui $\overline{VH}=\overline{VO}+\overline{OH}=x+1$.

Ricordiamo che $V_{cono}=\frac{1}{3}\pi\,\overline{HB}^2\cdot\overline{VH}$ e $V_{sfera}=\frac{4}{3}\pi\,\overline{CO}^3$. Per impostare l'equazione risolvente dobbiamo cercare di esprimere $\overline{HB}^2$ in funzione di *x*. Verifica che dalla similitudine di *VOC* con *VHB* si deduce: $\overline{HB}:\overline{OC}=\overline{VH}:\overline{VC}$ quindi $\overline{HB}=\frac{\overline{OC}\cdot\overline{VH}}{\overline{VC}}$; dobbiamo ancora ricavare $\overline{VC}$ che per il teorema di Pitagora su *VCO* è … Sostituendo tutti gli elementi trovati nella relazione che lega il volume del cono con il volume della sfera, verifica che si ottiene $x^2+2x(1-2k)+4k=0$ con $x>0$, da discutere con il metodo di Cartesio.

323 Il quadrilatero *ABCD* ha le diagonali perpendicolari ed è inscritto in una circonferenza; sapendo che $\overline{AB}=5a\,;\ \overline{AE}=3a\,;\ 2p_{BCA}=\frac{5}{2}\cdot\overline{BD}$, essendo *E* punto d'incontro delle diagonali, determinate la misura delle diagonali. [Poni $\overline{CE}=x$, analizza la posizione del punto *E* sulla diagonale *BD*.]

324 Il rettangolo *ABCD* ha i lati *AB* e *BC* che misurano rispettivamente *a* e *3a* (*a>0*). Prolunga il lato *AB* di due segmenti congruenti *BN* e *AM* e sia *V* il punto di intersezione delle retta *MD* e *CN*. Posto $\overline{BN}=x$, determina la misura della base *MN* del triangolo *MVN* in modo che la sua area sia *k* volte l'area del rettangolo assegnato.

325 Due numeri reali hanno come somma *a* $(a\in\mathbb{R}_0)$; determinare i due numeri in modo che il loro prodotto sia *k* $(k\in\mathbb{R}_0)$. Quale condizione si deve porre sull'incognita? Per quale valore del parametro i due numeri soluzione sono uguali?

326 In un triangolo rettangolo l'altezza *AH* relativa all'ipotenusa *BC* misura *1m* e $A\hat{B}C=60°$. Determinare sulla semiretta *AH*, esternamente al triangolo un punto *P* in modo che sia *k* la somma dei quadrati delle distanze di *P* dai vertici del triangolo. Quale condizione va imposta al parametro *k* perché il problema abbia significato?

327 $\overline{AB}=16a\,;\ \overline{BC}=2a\sqrt{14}$ rappresentano le misure dei lati del rettangolo *ABCD*; determinare un punto *P* del segmento *AB* tale che la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici *C* e *D* sia uguale al quadrato della diagonale *DB*. Posto $\overline{AP}=x$ quale delle seguenti condizioni deve rispettare la soluzione? $A]\ x>0\,;\quad B]\ 0<x<16a\,;\quad C]\ x<16a$. Dopo aver risolto il problema spiegate il significato delle soluzioni ottenute.

Sheda di ripasso sulle equazioni

1. L'equazione $25x^2+1=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm 5$ [B] $x=\pm\frac{1}{5}$ [C] x=-5 e x=0 [D] non ha soluzioni reali

2. L'equazione $16x^2+x=0$ ha per soluzioni
[A] $x=4 \vee x=1$ [B] $x=\pm\frac{1}{4}$ [C] $x=-\frac{1}{16} \vee x=0$ [D] non ha soluzioni reali

3. L'equazione $4x^2-9x=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm\frac{3}{2}$ [B] $x=\pm\frac{9}{4}$ [C] $x=\frac{3}{2} \vee x=0$ [D] $x=\frac{9}{4} \vee x=0$

4. L'equazione $9x^2+6x+1=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm 3$ [B] $x=\pm\frac{1}{3}$ [C] $x=-\frac{1}{3}$ doppia [D] non ha soluzioni reali

5. L'equazione $x^2-6x+36=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm 6$ [B] $x=\pm\sqrt{6}$ [C] $x=6$ doppia [D] non ha soluzioni reali

6. Quale di queste equazioni ammette una soluzione doppia x=3?
[A] $x^2+6x+9=0$ [B] $9-x^2=0$ [C] $2x^2-12x+18=0$ [D] $3x^2+9x=0$

7. Le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono $x_1=1$ e $x_2=3$. L'equazione è pertanto:
[A] $x^2+x-1=0$ [B] $x^2-4x+3=0$ [C] $x^2-4x-3=0$ [D] $x^2+4x-3=0$

8. Il polinomio x^2+5x+6 può essere scomposto in:
[A] $(x+2)(x-3)$ [B] $(x+5)(x+1)$ [C] $(x-2)(x-3)$ [D] nessuna delle risposte precedenti

9. Una delle soluzioni dell'equazione $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$ è $\sqrt{2}$, quanto vale l'altra?
[A] $-\sqrt{2}$ [B] $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [C] $\sqrt{2}+1$ [D] 1

10. Per quale valore di *k* l'equazione $(2k-1)x^2+(2k+1)x+k-2=0$ diventa di I grado?
[A] $k=\frac{1}{2}$ [B] $k=-\frac{1}{2}$ [C] $k=2$ [D] $k=0$

11. L'equazione $4m^2x^2-5mx+1=0$ con parametro *m* ha per soluzioni
[A] $x=m \vee x=4m$ [B] $x=\frac{1}{m} \vee x=\frac{1}{4m}$ [C] $x=64m \vee x=1$ [D] $x=m \vee x=\frac{1}{4}$

12. L'equazione di secondo grado $x^2+(a+1)x+a=0$ con *a* parametro reale ha come soluzioni:
[A] $x=1 \vee x=a$ [B] $x=a-1 \vee x=1$ [C] $x=-a \vee x=-1$ [D] $x=a+1 \vee x=a$

13. L'equazione $x^2+(t-2)=0$ con *t* parametro reale ammette soluzioni reali
[A] per $t\leq 2$ [B] per $t\geq 2$ [C] per $t<2$ [D] nessuna delle risposte precedenti

14. Quanto vale il prodotto delle soluzioni dell'equazione $x^2-6a^2x+8a^4=0$?
[A] $8a^4$ [B] $8a^2$ [C] $6a^2$ [D] non esiste

15. Il polinomio $x^2+(m-2)x-2m$ con *m* parametro reale può essere scomposto in:
[A] $(x+m)(x+1)$ [B] $(x+m)(x-2)$ [C] $(x+m)(x+2)$ [D] $(x-m)(x-2)$

16. L'equazione $x^2+(k-1)x=0$ con *k* parametro reale:
[A] non ha soluzioni reali
[B] ha una soluzione uguale a zero
[C] ha due soluzioni reali coincidenti per k=0
[D] ha soluzioni reali e distinte per k=1

17. L'equazione $x^2+2x+k-2=0$ con *k* parametro reale:
[A] ha due soluzioni reali coincidenti per k=3
[B] ha due soluzioni reali coincidenti per k=1
[C] ha una soluzione nulla per k=-2
[D] ha soluzioni reali e distinte per $k\neq 3$

18. L'equazione $x^2+m^2+1=0$ con *m* parametro reale:
[A] ammette due soluzioni reali e opposte
[B] ammette due soluzioni coincidenti
[C] non ammette soluzioni reali
[D] ammette due soluzioni negative

19. L'equazione $2x^2+k^2=0$ con *k* parametro reale:
[A] ammette due soluzioni reali e distinte
[B] ammette due soluzioni reali solo se *k* è positivo
[C] ammette soluzioni coincidenti per *k=0*
[D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

20. L'equazione $tx^2-1=0$
[A] ha come soluzioni $x_1=0$ e $x_2=1-t$
[B] ammette sempre soluzioni reali
[C] ammette soluzioni reali per t>0
[D] ha come soluzioni $x=\pm t$

1.D-2.C-3.D-4.C-5.D-6.A-7.B-8.D-9.D-10.A-11.B-12.C-13.A-14.A-15.B-16.B-17.A-18.C-19.C-20.C

Autori

Erasmo Modica: teoria, esercizi
Anna Cristina Mocchetti: teoria, esercizi
Claudio Carboncini: coordinamento, editing
Antonio Bernardo: coordinamento, integrazioni, esercizi
Francesco Daddi: esercizi
Germano Pettarin: esercizi
Pierluigi Cunti: esercizi
Lisa Maccari: esercizi
Gemma Fiorito: correzioni
Sara Gobbato: integrazioni
Eugenio Medaglia: suggerimenti
Luciano Sarra: correzioni
Lucia Rapella: correzioni

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 2.1 del 21.06.2012