

► 13. Problemi di secondo grado in una incognita

La risoluzione dei problemi ... serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose. (R. Descartes)

Sappiamo che nel corso degli studi o nell'attività lavorativa possono presentarsi problemi di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale; possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze presenti nel problema e quando si può costruire, tramite queste relazioni, un modello matematico che ci permetta di raggiungere la soluzione al quesito posto dalla situazione problematica.

Affronteremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di secondo grado in una sola incognita.

Teniamo presente, prima di buttarci nella risoluzione del problema, alcuni passi che ci aiuteranno a costruire il modello matematico:

- la lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
- la scelta della grandezza incognita del problema, la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, le condizioni che devono essere soddisfatte dall'incognita;
- la traduzione in "forma matematica" delle relazioni che intercorrono tra i dati e l'obiettivo, cioè l'individuazione del modello matematico (equazione risolvente).

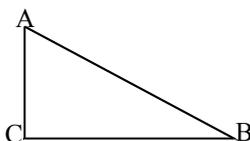
Dopo aver risolto l'equazione occorre confrontare la soluzione trovata con le condizioni poste dal problema.

Problema 1

Nel triangolo rettangolo ABC, rettangolo in C l'ipotenusa supera il cateto maggiore CB di 2m; la differenza tra i cateti è 23m. Determinare la misura del perimetro e l'area di ABC.

Dati Obiettivo

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{CB} + 2 && ? 2p \\ \overline{CB} - \overline{AC} &= 23 && ? Area \\ A\hat{C}B &= \text{retto} \end{aligned}$$



Strategia risolutiva. Osserva che $2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$; $Area = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{2}$

Poni $\overline{BC} = x$ dai dati si ha $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{x+2}{x-23}$ con $\begin{cases} x > 0 & \text{essendo misura di un segmento} \\ x > 23 & \text{poiché } \overline{AC} \text{ deve essere positiva} \end{cases}$

Essendo il triangolo rettangolo, i lati sono legati dal teorema di Pitagora quindi si deve verificare:

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \rightarrow (x+2)^2 = (x-23)^2 + x^2$. L'equazione risolvente di secondo grado, in forma canonica: $x^2 - 50x + 525 = 0$ con $\Delta = 400$. L'equazione è determinata con il discriminante positivo, quindi esistono due soluzioni reali distinte: $x_1 = 15 \vee x_2 = 35$ entrambe positive. Ai fini del problema x_1 non è accettabile, quindi il problema ha una sola soluzione e $\overline{BC} = 35$; $\overline{AB} = 37$; $\overline{AC} = 12$

Conclusione: $2p = 35 + 37 + 12 = 84 (m)$; $Area = 210 (m^2)$

Problema 2

Un padre aveva 26 anni alla nascita del figlio; moltiplicando le età attuali del padre e del figlio si trova il triplo del quadrato dell'età del figlio; calcolare le due età.

Indichiamo con p l'età attuale del padre e con f l'età del figlio

Dati: $p = f + 26$; $p \cdot f = 3f^2$ Obiettivo: $? f$; $? p$

Strategia risolutiva: I dati permettono di impostare la relazione $(f+26) \cdot f = 3 \cdot f^2$ che esprime il legame tra le età di oggi del padre e del figlio; siamo di fronte ad un'equazione di secondo grado nell'incognita f . La soluzione dell'equazione deve essere espressa da un numero positivo poiché esprime l'età.

Risolvi: $2f^2 - 26f = 0$ le cui soluzioni sono $f_1 = 0 \vee f_2 = 13$. Per le condizioni poste la soluzione del problema è $f = 13$.

Risposta: Oggi il figlio ha 13 anni e il padre 39 anni.

Problema 3

Il trapezio isoscele ABCD è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB di misura 25cm; determina le

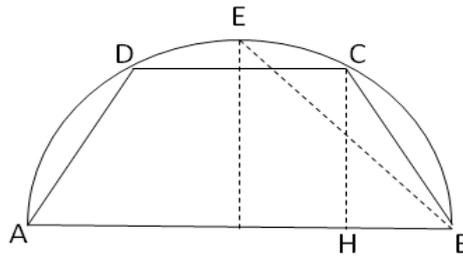
misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è 62cm.

Dati

Obiettivo

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 25 \\ 2p &= 62 \\ \overline{AB} \parallel \overline{DC} \\ \overline{AD} &= \overline{CB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ? \overline{DC} \\ ? \overline{CB} \end{aligned}$$



Strategia risolutiva:

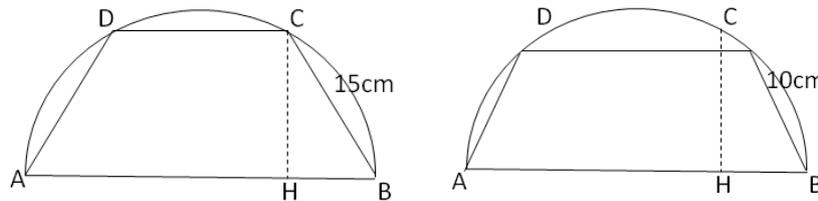
$\overline{AB} + \overline{DC} + 2\overline{BC} = 62$; fissiamo come incognita la misura in cm di BC: $\overline{BC} = x$

Determiniamo le condizioni sull'incognita: dovrà essere $x > 0$ poiché rappresenta la misura di un segmento e inoltre affinché esista realmente il trapezio isoscele il punto C non deve coincidere con il punto medio E dell'arco DC, quindi $x < \frac{25}{2}\sqrt{2}$

Tracciata l'altezza CH ($H \in AB$) si ha $\overline{DC} = \overline{AB} - 2\overline{HB}$ e per il 1° teorema di Euclide sul triangolo ACB, rettangolo in C, $\overline{HB} : \overline{CB} = \overline{CB} : \overline{AB}$; determiniamo quindi la misura di HB in funzione dell'incognita fissata: $\overline{HB} = \frac{x^2}{25}$ da cui $\overline{DC} = 25 - \frac{2x^2}{25}$

Costruiamo l'equazione risolvente: $25 + 2x + 25 - \frac{2x^2}{25} = 62 \rightarrow x^2 - 25x + 150 = 0$ che ha soluzioni reali perché

Si ottiene $x_1 = 10 \vee x_2 = 15$, entrambe accettabili. Si hanno dunque due trapezi inscritti:



Problema 4

Un capitale di 25000 € viene depositato in banca a un tasso di interesse annuo c. Gli interessi maturati durante il primo anno non vengono ritirati. Nell'anno seguente si investono sia il capitale sia gli interessi maturati a un tasso di interesse annuo aumentato dello 0,5%. Alla fine dei due anni si ritira la somma di 26291,10 €. Calcola i tassi di interesse praticati dalla banca.

Svolgimento. Assumiamo come variabile c il tasso di interesse praticato il primo anno, espresso come numero decimale e non in forma percentuale. Il tasso praticato nel secondo anno sarà c+0,05.

Alla fine del primo anno in banca rimane tra capitale e interessi $25000 + 25000 \cdot c = 25000(1+c)$. Nel secondo anno il tasso praticato è c+0,005 che va applicato alla somma $25000(1+c)$.

Si ottiene quindi l'equazione $25000(1+c)(1+c+0,005) = 26291,10$

Risolvo l'equazione

$$25000(1+c)(1,005+c) = 26291,10 \text{ moltiplicando tra le parentesi tonde si ha}$$

$$25000(1,005+c+1,005c+c^2) = 26291,10 \text{ dividendo per 25000 primo e secondo membro}$$

$$1,005+c+1,005c+c^2 = \frac{26291,10}{25000} \text{ riscrivendo in ordine l'equazione si ha}$$

$$c^2 + 2,005c - 0,046644 \text{ applico la formula risolutiva}$$

$$c_{1,2} = \frac{-2,005 \pm \sqrt{4,020025 + 0,186576}}{2} = \frac{-2,005 \pm 2,051}{2} \quad c_1 = -2,028 \quad c_2 = 0,023$$

La soluzione c_1 è negativa e non è accettabile.

La risposta al problema è 0,023 cioè 2,3% il primo anno e 2,8% il secondo anno.

280 Il quadrato di un numero reale supera la metà del numero stesso di 5. Determina i numeri reali che rendono vera la proposizione enunciata. [-2; 5/2]

281 Il prodotto della metà di un numero relativo con il suo successivo è 666. Quali numeri verificano questa proprietà? [36; -37]

282 Trova un numero positivo che addizionato al proprio quadrato dia come somma 156.

283 Un numero addizionato al quadrato della sua metà, dà come risultato 120. Trova il numero.

284 Verifica che non esiste alcun numero reale tale che il quadrato del suo doppio uguagli la differenza tra il triplo del suo quadrato e il quadrato della somma del numero con 3.

285 Due numeri naturali hanno rapporto $\frac{2}{3}$ e somma dei loro quadrati 3757. Individua i numeri che verificano questa proprietà. [51, 34]

286 La somma dei quadrati di due numeri pari consecutivi è 580. Quali sono i due numeri? [16; 18]

287 Di due numeri naturali consecutivi si sa che la somma dei loro reciproci è $\frac{9}{20}$. Quali sono i due numeri? [4; 5]

288 Di cinque numeri interi consecutivi si sa che la differenza tra il quadrato della somma degli ultimi due numeri e la somma dei quadrati dei primi tre è 702. Qual è il più piccolo di questi numeri? [17]

289 * La somma delle età di un padre con quella del figlio è 38. Sapendo che l'età del padre aumentata di 4 anni dà il quadrato dell'età del figlio, trovare le due età.

290 * Determina due numeri sapendo che la somma tra il doppio del minore ed il triplo del maggiore è 84 e che il rapporto tra la loro somma e il loro prodotto è $\frac{2}{15}$.

291 * In una frazione il numeratore supera di 1 il doppio del denominatore. Determina la frazione sapendo che il numeratore e il denominatore sono numeri naturali e che essa è equivalente a un'altra frazione il cui numeratore supera di 4 il triplo del denominatore della prima frazione e il cui denominatore supera di 2 il denominatore della prima frazione. [$\frac{5}{2}$]

292 * Trova l'età di una persona sapendo che fra due anni la sua età sarà uguale al quadrato della quarta parte dell'età che aveva tre anni fa. [23]

293 * Trova tre numeri che siano multipli interi consecutivi di 3 e tali che la somma del quadrato del minore con il prodotto degli altri due sia 414. [12; 15; 18]

294 * Trova due numeri positivi sapendo che il primo supera di 2 la terza parte del secondo e che il quadrato del primo supera di 4 la quinta parte del quadrato del secondo. [7; 15]

295 * Decomponi 15 in due parti in modo che la somma dei loro quadrati sia 113. [8; 7]

296 * In una frazione il numeratore e il denominatore hanno somma 10, mentre la somma dei loro quadrati è 58. Qual è la frazione? [$\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{3}$]

297 Due navi partono contemporaneamente da uno stesso porto e arrivano alla stessa destinazione dopo aver percorso sulla stessa rotta a velocità costante 720 miglia. Sapendo che una delle due navi viaggia con una velocità di 1 nodo (1 miglio all'ora) superiore a quella dell'altra nave e che perciò arriva 3 ore prima a destinazione, determina le velocità in nodi delle due navi. [15; 16]

298 Due navi che viaggiano su rotte perpendicolari a velocità costante si incontrano in mare aperto. Sapendo che una delle navi viaggia a 15 nodi (1 nodo = 1 miglio all'ora), dopo quanto tempo le due navi si trovano alla distanza di 40 miglia?

299 Luca e Carlo bevono due aranciate in bottiglia. Nel tempo in cui Luca beve 11 sorsi, Carlo ne beve 8, ma due sorsi di Carlo equivalgono a tre di Luca. Poiché quando Carlo inizia a bere Luca ha già preso 4 sorsi, dopo quanti sorsi di Carlo le due bibite hanno lo stesso livello?

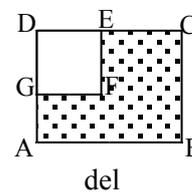
300 Un maratoneta durante un allenamento fa due giri di un percorso di 22 km mantenendo in ciascun giro una velocità costante ma nel secondo giro la velocità è inferiore di 0,5 km/h rispetto al primo giro. A quali velocità a corso se ha impiegato complessivamente 2 ore e un quarto?

301 Un capitale di 1200 € è depositato in banca a un certo tasso di interesse annuale. Alla scadenza del primo anno gli interessi maturati vengono ridepositati sullo stesso conto. Alla scadenza del secondo anno si ritira la somma di 12854,70 euro. Qual è stato il tasso di interesse? [3,5%]

302 In un rettangolo, se si aumenta di 2 metri la base e si riduce di un metro l'altezza, la sua area aumenta di 4 metri quadrati. Se invece si riduce di un metro la base e si aumenta di 2 metri l'altezza, l'area aumenta di 22 metri quadrati. Quali sono le dimensioni del rettangolo?

303 Una ditta spende mensilmente 73500 in stipendi per i propri dipendenti. Aumentando di 5 il numero dei dipendenti, ma riducendo l'orario di lavoro, diminuisce a ciascuno lo stipendio di 200 e spende solamente 2500 in più per gli stipendi. Quanti dipendenti aveva inizialmente la ditta e quanto guadagnava ognuno di essi? [35, 2100]

304 Da un cartoncino rettangolare (ABCD, come in figura) si vuole ritagliare un quadrato (DEFG) in modo che le due parti ottenute siano equivalenti. Determinare la misura



lato del quadrato sapendo che $\overline{EC} = 6\text{ cm}$ e $\overline{AG} = 4\text{ cm}$. [$\overline{DE} = 12\text{ cm}$]

305 Un terreno a forma rettangolare di 6016 m^2 viene recintato con un muro lungo 350 m . Quali sono le dimensioni del rettangolo? [47; 128]

306 Determinare sul segmento AB di misura 5 m un punto P tale che il rettangolo delle due parti sia equivalente al quadrato di lato 2 m . Rappresenta con un disegno le situazioni soluzione. [1cm; 4cm]

307 Calcolare perimetro e area del triangolo ABC isoscele sulla base AB sapendo che la differenza tra la base e l'altezza ad essa relativa è $m.0,5$ e tale è anche la differenza tra il lato CB e la base stessa. [$2p=25\text{ m}$; $A=30\text{ m}^2$]

308 La superficie del rettangolo ABCD supera di m^2119 la superficie del quadrato costruito sul lato minore AD. Determinare il perimetro e la misura della diagonale sapendo che i $7/10$ del lato maggiore AB sono uguali ai $12/5$ del lato minore. [$2p=62\text{ m}$; $d=25\text{ m}$]

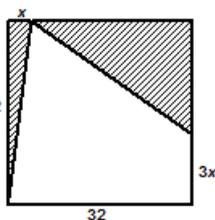
309 Nel trapezio rettangolo ABCD, il rapporto tra la base maggiore AB e la minore CD è $8/5$, il lato obliquo forma con AB un angolo di 45° . Determinare il perimetro sapendo che l'area è 312 m^2 . [$2p=64+12\sqrt{2}$]

310 Determina il perimetro di un rombo che ha l'area di 24 m^2 e il rapporto tra le diagonali $4/3$. [40m]

311 Un rettangolo ABCD ha il perimetro di 48 cm e l'area di 128 cm^2 . A una certa distanza x dal vertice A sui due lati AD e AB si prendono rispettivamente i punti P e Q. Alla stessa distanza x dal vertice C sui lati CB e CD si prendono rispettivamente i punti R e S. Sapendo che il rapporto tra l'area del rettangolo ABCD e l'area del quadrilatero PQRS è $32/23$ calcola la distanza x . [6cm]

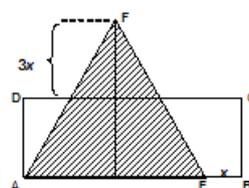
312 Un trapezio rettangolo ha la base minore di 9 cm , l'altezza i $2/9$ della base maggiore e l'area di $20+9\sqrt{2}\text{ cm}^2$. Determina la misura della base maggiore. [$3\sqrt{2}$]

313 Da un quadrato di 32 cm di lato vengono ritagliati due triangoli rettangoli come descritti in figura dalla parte colorata. Calcola la misura di x , inferiore alla metà del lato del quadrato, in modo che l'area totale dei due triangoli evidenziati sia pari a 344 cm^2 .



$$\left[\frac{32}{2}x + \frac{(32-x)(32-3x)}{2} = 344 \rightarrow x = 4\text{ cm} \right]$$

314 Il rettangolo ABCD ha l'area di 240 cm^2 e l'altezza AD di 12 cm . Si vuole trasformare il rettangolo in un triangolo AEF allungando l'altezza di una quantità $3x$ e accorciando la



base di una quantità x (vedi figura) in modo che il nuovo triangolo AEF che abbia l'area di 162 cm^2 . [$x=2$; la soluzione $x=14$ non è accettabile]

315 Il rettangolo AEFG ha l'area di 768 cm^2 e l'altezza AG di 24 cm . Si vuole allungare l'altezza di una quantità x e accorciare la base di una quantità doppia $2x$ in modo da ottenere un secondo rettangolo ABCD che abbia l'area di 702 cm^2 . Determina la quantità x . [3cm]

316 Il rettangolo ABCD ha l'area di 558 cm^2 e il lato DC di 18 cm . Lo si vuole trasformare in un nuovo rettangolo ACFG accorciando l'altezza di una quantità $5x$ e allungando la base di una quantità $4x$ in modo che il nuovo rettangolo ACFG che abbia l'area di 228 cm^2 . Determina la quantità x necessaria a compiere la trasformazione richiesta. [5]

317 Un trapezio isoscele di area 144 cm^2 ha la base maggiore che supera di 10 cm la base minore che a sua volta supera di 10 cm l'altezza. Determina il perimetro del trapezio.

318 La piramide di Cheope ha base quadrata ed ha una superficie totale pari a 135700 m^2 . Sapendo che l'apotema della piramide è pari a 180 metri , si calcoli la lunghezza del lato di base. [230 m]

319 Un container a forma di parallelepipedo a base quadrata ha una superficie totale pari a 210 m^2 . L'altezza è il doppio del lato di base diminuita di 2 metri . Trovare la lunghezza del lato di base. [5m]

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 98; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno redatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf