EQUAZIONI PARAMETRICHE

Se in una equazione compare oltre all'incognita anche un'altra lettera, a cui si da il nome di parametro, allora l'equazione si dice *PARAMETRICA*.

Sia un esempio: $(k-1)x^2 - 3x + 2 = 0$ è un'equazione parametrica di secondo grado nel parametro k.

Un'equazione parametrica rappresenta un insieme di equazioni ciascuna delle quali si ottiene dando al parametro un valore. Se si vuole un'equazione particolare le cui soluzioni devono soddisfare una determinata condizione bisogna ricorrere a strategie risolutive che ne abbreviano la ricerca.

I possibili casi che si possono avere sono i seguenti:

1) Le radici siano reali: si pone

$$\Delta \geq 0;$$

2) Le radici siano reali e distinte: si pone

$$\Delta > 0;$$

3) Le radici siano reali e coincidenti: si pone

$$\Delta = 0;$$

4) Le radici non siano reali: si pone

$$\Delta < 0;$$

5) Una soluzione abbia un valore assegnato $r \in \mathbb{R}$: Si sostituisce nell'equazione, al posto di x, il valore r e si risolve l'equazione nel parametro.
6) La somma delle radici sia pari a un valore assegnato $r \in \mathbb{R}$:

$$x_1 + x_2 = r \rightarrow -\frac{b}{a} = r;$$

7) Il prodotto delle radici sia pari a un valore assegnato $r \in \mathbb{R}$:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = r;$$

8) La differenza delle radici sia pari a un valore assegnato $r \in \mathbb{R}$:

$$x_2 - x_1 = r \rightarrow \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = r \rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = r;$$

9) La somma delle radici sia positiva (negativa):

$$x_1 + x_2 > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0;$$

Commento [N1]: Si suppone che x_2 sia maggiore di x_1. Si hanno così due casi: 1) Se la differenza è > 0 allora si pone $x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$; 2) se la differenza è < 0 allora si pone $x_1 - x_2 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$.

10) Le radici siano opposte:

$$x_1 = -x_2 \to x_1 + x_2 = 0 \to -\frac{b}{a} = 0 \to b = 0;$$

11) Il prodotto delle radici sia positivo (negativo):

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \to \frac{c}{a} > 0;$$

12) Le radici siano reciproche:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \to x_1 \cdot x_2 = 1 \to \frac{c}{a} = 1 \to c = a \to a - c = 0;$$

13) Le radici siano antireciproche:

$$x_1 = -\frac{1}{x_2} \to x_1 \cdot x_2 = -1 \to \frac{c}{a} = -1 \to c = -a \to a + c = 0;$$

14) La somma dei quadrati delle radici sia pari a t≥0:

$$x_1^2 + x_2^2 = t \to (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = t \to \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = t \to \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = t;$$

15) La somma dei cubi delle radici sia pari a r∈ℝ:

$$x_1^3 + x_2^3 = r \to (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = r \to \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = r \to$$
$$\to \frac{(-b)^3 - 3abc}{a^3} = r;$$

16) La somma dei reciproci delle radici sia pari a r∈ℝ:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = r \to \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = r \to \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = r \to -\frac{b}{c} = r;$$

17) Il prodotto dei reciproci delle radici sia pari a r∈ℝ:

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = r \to \frac{1}{\frac{c}{a}} = r \to \frac{a}{c} = r;$$

Commento [N2]: Per Waring si ha che $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

Commento [N3]: Per Waring si ha che $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

18) La somma dei quadrati dei reciproci delle radici sia pari a r≥0:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=r \rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2}=r \rightarrow \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2 \cdot x_2^2}=r \rightarrow \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=r \rightarrow \boldsymbol{\frac{b^2-2ac}{c^2}=r};$$

19) Il prodotto dei quadrati dei reciproci delle radici sia pari a r≥0:

$$\frac{1}{x_1^2}\cdot\frac{1}{x_2^2}=r \rightarrow \frac{1}{x_1^2 \cdot x_2^2}=r \rightarrow \frac{1}{(x_1x_2)^2}=r \rightarrow \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=r \rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2=r;$$

Applichiamo quanto sopra detto all'equazione (k-1)x^2 - 3x + 2 = 0.

E opportuno osservare che per poter risolvere i vari casi bisogna tenere a disposizione le seguenti quantità per poterle subito utilizzarle.

- a = k-1; b=-3; c=2;
- La somma delle soluzioni $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{3}{k-1}$;
- Il prodotto delle soluzioni $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{2}{k-1}$;
- Il discriminante $\Delta = b^2-4ac=9-8(k-1)=9-8k+8=17-8k$;

Determinare il valore di k affinché

1) Le radici siano reali: poniamo il $\Delta \geq 0 \rightarrow 17-8k \geq 0 \rightarrow k \leq \frac{17}{8}$;
2) Le radici siano reali e distinte: si pone $\Delta > 0$ $\quad 17-8k>0$ $\quad k<\frac{17}{8}$;
3) Le radici siano reali e coincidenti: si pone $\Delta = 0 \rightarrow 17-8k=0 \rightarrow k=\frac{17}{8}$;
4) Le radici non siano reali: si pone $\Delta < 0$;
5) Una soluzione abbia valore - 1. Si sostituisce nell'equazione, al posto di x, il valore – 1 e si risolve l'equazione nel parametro.

$$(\mathrm{k}-1)(-1)2-3(-1)+2=0 \rightarrow \mathrm{k}-1+3+2=0 \rightarrow \mathrm{k}=-4;$$

6) La somma delle radici sia pari a 4: $x_1+x_2=4 \rightarrow \frac{3}{k-1}=4 \rightarrow 3=4k-4 \rightarrow k=\frac{7}{4}$;
7) Il prodotto delle radici sia pari a 3: $x_1 \cdot x_2=3 \rightarrow \frac{2}{k-1}=3 \rightarrow 2=3k-3 \rightarrow k=\frac{5}{3}$;

8) La differenza delle radici sia pari a 5:

$$x_2 - x_1 = 5 \rightarrow \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 5 \rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = 5 \rightarrow \frac{17-8k}{k-1} = 5 \rightarrow 17 - 8k = 5k - 5 \rightarrow k = \frac{22}{13};$$

Commento [N4]: Si suppone che x_2 sia maggiore di x_1. Si hanno così due casi: 1) Se la differenza è > 0 allora si pone x_2-x_1=$\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$; 2) se la differenza è < 0 allora si pone x_1-x_2= -$\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$.

9) La somma delle radici sia positiva (negativa):

$$x_1 + x_2 > 0 \rightarrow \frac{3}{k-1} > 0 \rightarrow k - 1 > 0 \rightarrow k > 1;$$

10) Le radici siano opposte:

$$x_1 = -x_2 \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow -3 = 0 \; impossibile; \; quindi \; \nexists k;$$

11) Il prodotto delle radici sia positivo (negativo):

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \rightarrow \frac{2}{k-1} > 0 \rightarrow k - 1 > 0 \rightarrow k > 1;$$

12) Le radici siano reciproche:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \rightarrow \frac{2}{k-1} = 1 \rightarrow 2 = k - 1 \rightarrow k = 3;$$

13) Le radici siano antireciproche:

$$x_1 = -\frac{1}{x_2} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = -1 \rightarrow \frac{2}{k-1} = -1 \rightarrow 2 = -k + 1 \rightarrow k = -1;$$

14) La somma dei quadrati delle radici sia pari a 13:

Commento [N5]: Per Waring si ha che $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$x_1^2 + x_2^2 = 13 \rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 13 \rightarrow \left(\frac{3}{k-1}\right)^2 - 2\frac{2}{k-1} = 13 \rightarrow \frac{9}{(k-1)^2} - \frac{4}{k-1} = 13 \rightarrow 9 - 4(k-1) - 13(k-1)^2 = 0 \rightarrow$$

$$9 - 4k + 4 - 13k^2 + 26k - 13 = 0 \rightarrow 13k^2 - 22k = 0 \rightarrow k = 0 \; oppure \; k = \frac{13}{22}$$

15) La somma dei cubi delle radici sia pari a 9:

Commento [N6]: Per Waring si ha che $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

$$x_1^3 + x_2^3 = 9 \rightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \rightarrow \left(\frac{3}{k-1}\right)^3 - 3\frac{2}{k-1} \cdot \frac{3}{k-1} = 9 \rightarrow \frac{27}{(k-1)^3} - \frac{18}{(k-1)^2} - 9 = 0 \rightarrow 27 - 18(k-1) - 9(k-1)^3 = 0;$$

qui conviene porre $(k-1) = z$ per cui l'equazione si scrive $9z^3 + 18z - 27 = 0 \rightarrow (z-1)(9z^2 + 9z + 27) = 0 \rightarrow z - 1 = 0 \rightarrow z = 1$ (si osservi che l'equazione $9z^2 + 9z + 27 = 0$ non ammette soluzioni reali);

quindi $\quad k - 1 = z = 1 \rightarrow k = 2$

16) La somma dei reciproci delle radici sia pari a $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}\to\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{2}\to\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{2}\to-\frac{b}{c}=\frac{1}{2}\to\frac{-3}{2}=\frac{1}{2}\ impossibile;\text{ quindi }\nexists k;$$

17) Il prodotto dei reciproci delle radici sia pari $\frac{3}{2}$:

$$\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{3}{2}\to\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{3}{2}\to\frac{a}{c}=\frac{3}{2}\to\frac{k-1}{2}=\frac{3}{2}\to k-1=3\to k=4;$$

18) La somma dei quadrati dei reciproci delle radici sia pari a $\frac{5}{4}$:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{5}{13}\to\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2\cdot x_2^2}=\frac{5}{4}\to\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2\cdot x_2^2}=\frac{5}{4}\to\frac{\left(\frac{3}{k-1}\right)^2-2\frac{2}{k-1}}{\left(\frac{2}{k-1}\right)^2}=\frac{5}{4}\to\frac{\frac{9}{(k-1)^2}-\frac{4}{(k-1)}}{\frac{4}{(k-1)^2}}=\frac{5}{4}\to\frac{9-4(k-1)}{4}=\frac{5}{4}\to k=2$$

19) Il prodotto dei quadrati dei reciproci delle radici sia pari a $\frac{9}{16}$:

$$\frac{1}{x_1^2}\cdot\frac{1}{x_2^2}=\frac{9}{16}\to\frac{1}{x_1^2\cdot x_2^2}=\frac{9}{16}\to\frac{1}{(x_1x_2)^2}=\frac{9}{16}\to\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{9}{16}\to\left(\frac{a}{c}\right)^2=\frac{9}{16}\to;\left(\frac{k-1}{2}\right)^2=\frac{9}{16}\to\frac{(k-1)^2}{4}=\frac{9}{16}\to(k-1)^2=\frac{9}{4}\to$$

$$k-1=\mp\frac{3}{2}\to k=-\frac{1}{2}\ oppure\ k=-\frac{5}{2}$$