Introduzione alla cinematica

- La cinematica si pone come obiettivo lo studio del moto, ovvero lo studio degli spostamenti di un corpo in funzione del tempo.

- A tale fine viene introdotto un concetto astratto: **il punto materiale**. Esso è un oggetto privo di dimensioni (ovvero puntiforme) ma che tuttavia possiede una massa. Più avanti nel corso identificheremo il punto materiale con il centro di massa di un corpo.

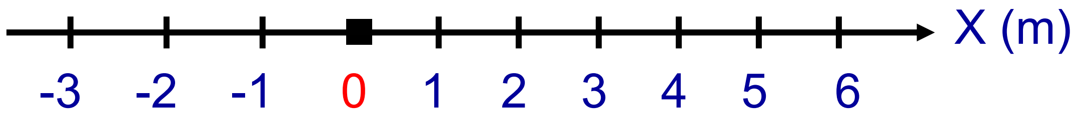
- Un punto materiale spostandosi nello spazio occupa successivamente una serie di punti geometrici. L'insieme di questi punti costituisce la **TRAIETTORIA** descritta dal punto.

- La traiettoria descrive una curva qualsiasi nello spazio. Per semplificare lo studio della cinematica in questo corso, considereremo soltanto delle traiettorie che descrivano delle figure geometriche semplici, quali linee rette, circonferenze, parabole, ellissi.

- Nei casi complessi, in genere, si cerca di ridursi a dei casi semplici con delle approssimazioni, oppure ad una somma di casi semplici.

- Da notare che lo studio delle curve nello spazio ricade nell'ambito della **geometria**. La geometria ha origini antichissime, basti pensare ai principi di Euclide.

Moto unidimensionale.
Il moto avviene lungo una retta



- Dobbiamo definire che cosa è lo spostamento e darne una misura quantitativa. Per fare ciò introduciamo **l'asse cartesiano.**

- Definiamo sulla retta un'origine rispetto alla quale misurare gli spostamenti.

- Definiamo un verso di percorrenza in modo da avere sia spostamenti positivi che negativi. La scelta è arbitraria.

- Definiamo un'unità di misura della lunghezza per misurare lo spostamento, ad esempio il metro.

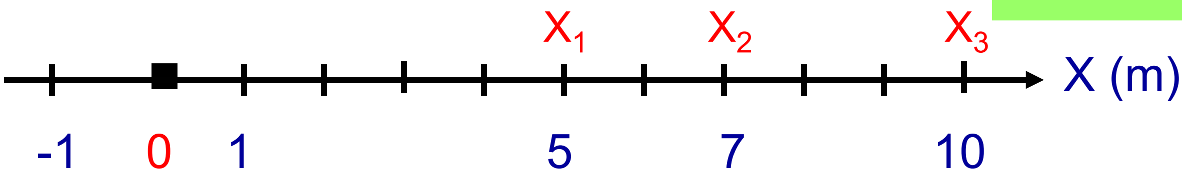
⇨ Se un punto materiale si trova nella posizione X_1 e successivamente si trova nella posizione X_2, il suo spostamento sarà dato da:

$$\boxed{\Delta X = X_2 - X_1}$$

Valore finale (X_2) — Valore iniziale (X_1)

Lo spostamento ha un segno.
Può essere positivo o negativo.

Ancora sullo spostamento



$$\boxed{\Delta X = X_2 - X_1}$$

- Non sappiamo nulla su cosa abbia fatto il punto mentre andava da X_1 a X_2 e su quanto spazio abbia effettivamente percorso.

$$\text{Spazio percorso} \neq \Delta X$$

- Facciamo un esempio: $X_1 = 5$ m ; $X_2 = 7$ m

  Immaginiamo che il punto, partendo da X_1, sia andato prima nel punto $X_3 = 10$ m, e poi sia tornato indietro nel punto X_2.

$$\mathbf{\Delta X = X_2 - X_1 = \underset{\Delta X_2}{(X_2 - X_3)} + \underset{\Delta X_1}{(X_3 - X_1)} =}$$

$$\mathbf{2 \quad = (7 - 10) + (10 - 5) = -3 + 5 = 2\ m}$$

- Per trovare lo spazio percorso dobbiamo considerare il valore assoluto dello spostamento.

  Esempio: spazio percorso = $\mathbf{|X_2 - X_3| + |X_3 - X_1| =}$

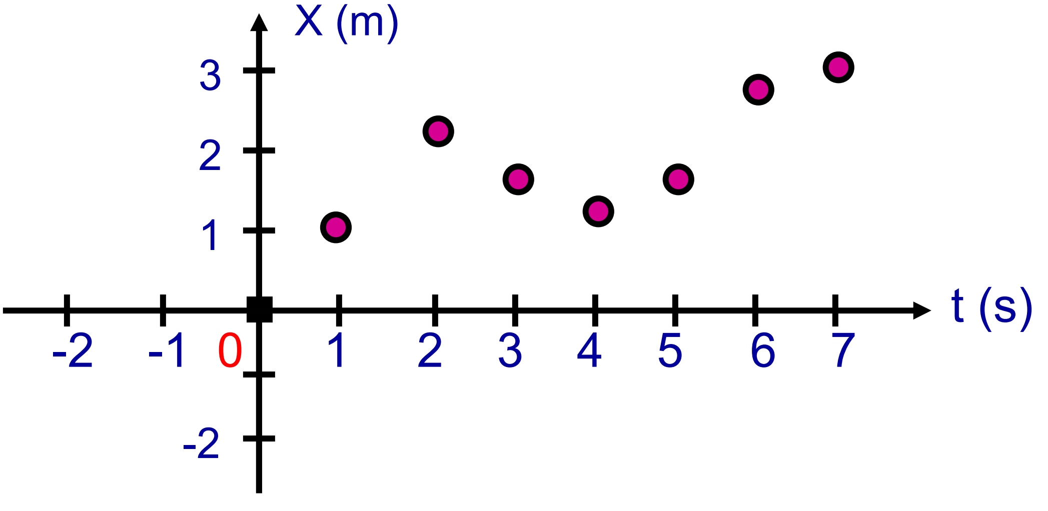
$$\mathbf{3 \quad + \quad 5 \quad = 8\ m}$$

- Come si vede lo spazio percorso è diverso dallo spostamento.

Legge oraria

- Supponiamo di scattare una fotografia ogni secondo al punto materiale che si sta spostando lungo la retta graduata.

- Costruiamo quindi il seguente grafico, dove in ascissa mettiamo il tempo e sulle ordinate mettiamo lo spazio. Anche per il tempo fissiamo un'origine, mentre per il verso non abbiamo scelta in quanto il tempo scorre in una direzione soltanto.



- Non sappiamo quale sia stato il tipo di moto del punto tra una fotografia e l'altra. Possiamo assumere che abbia fatto il moto più semplice (moto rettilineo uniforme).

- Se vogliamo più informazioni sul moto, dobbiamo diminuire l'intervallo tra una foto e l'altra, facciamo ad esempio una foto ogni decimo di secondo.

- Possiamo immaginare di ridurre sempre più il tempo intercorso tra una fotografia e l'altra, fino a quando questi diventa un infinitesimo.

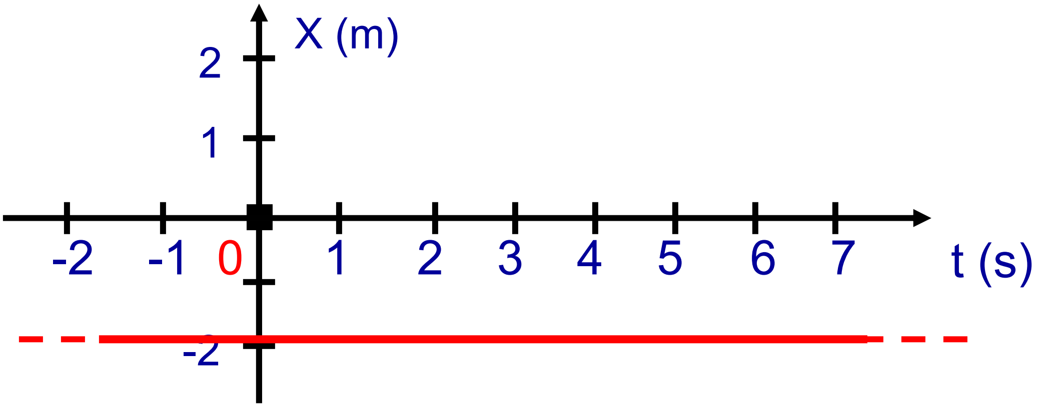
- Abbiamo ottenuto così una funzione continua dello spazio in funzione del tempo:

$X = X(t)$ [si può anche scrivere $X = f(t)$]

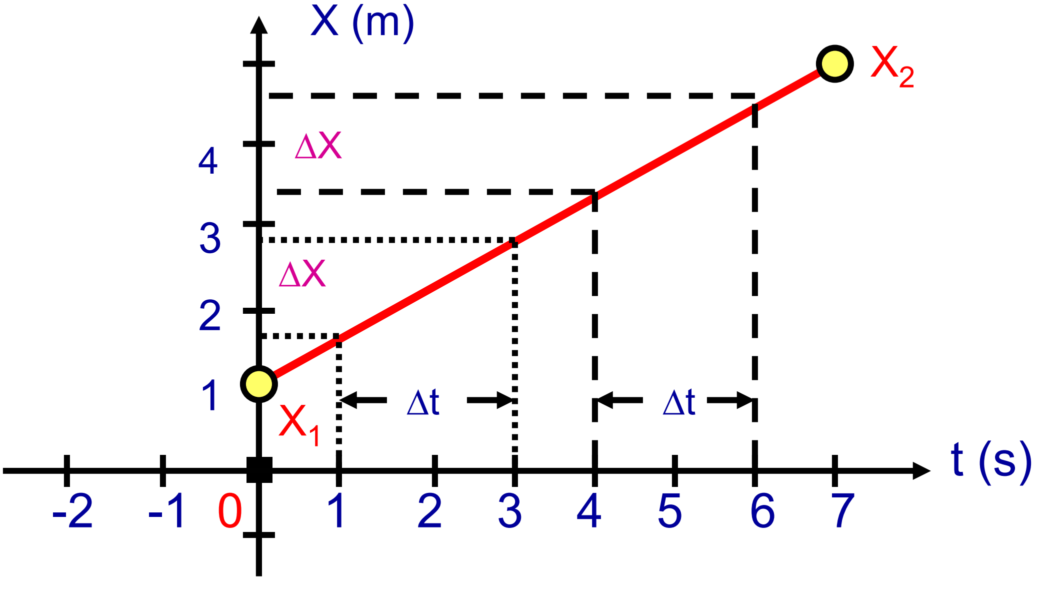
- Questa funzione si chiama **legge oraria del moto.**

Legge oraria: due esempi.

- Immaginiamo una lepre che stia ferma nel punto X = - 2 m



- Immaginiamo ora la lepre che si sta muovendo secondo la seguente legge oraria:



- Da notare in questo tipo di moto che se noi scegliamo un intervallo di tempo Δt, lo spostamento ΔX della lepre è sempre lo stesso, qualunque sia il punto in cui si trova la lepre. Come vedremo questa è la caratteristica del moto rettilineo uniforme.

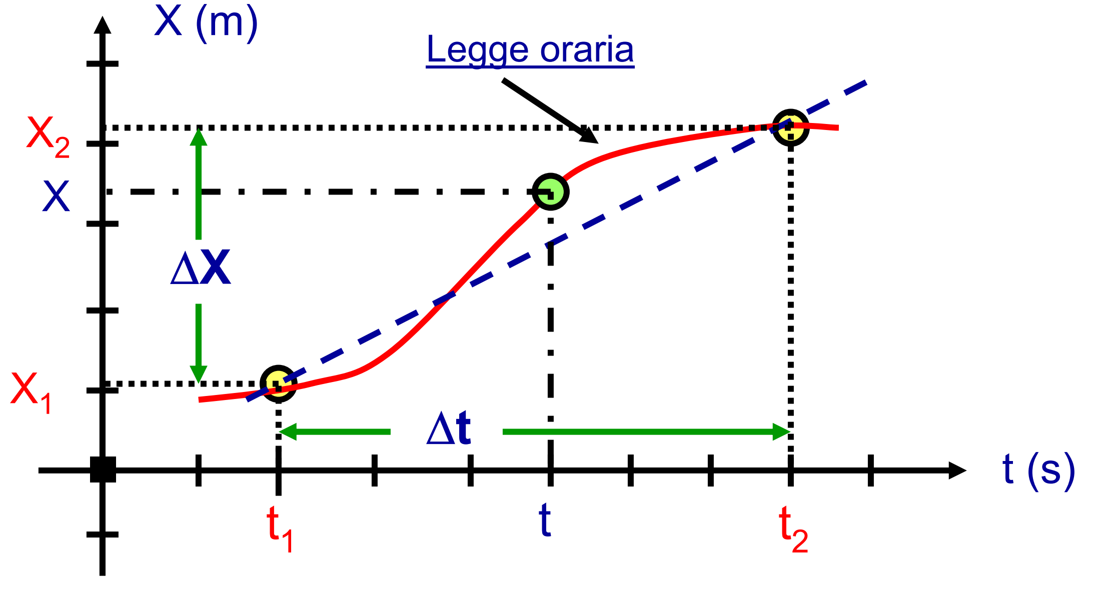
Definizione di velocità media

- La velocità media è il rapporto tra lo spostamento di un punto materiale e l'intervallo di tempo impiegato per realizzarlo.

$$v_{media} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

Da notare che la velocità ha sempre lo stesso segno dello spostamento, perché Δt è sempre positivo (il tempo, purtroppo, non scorre mai all'indietro!)

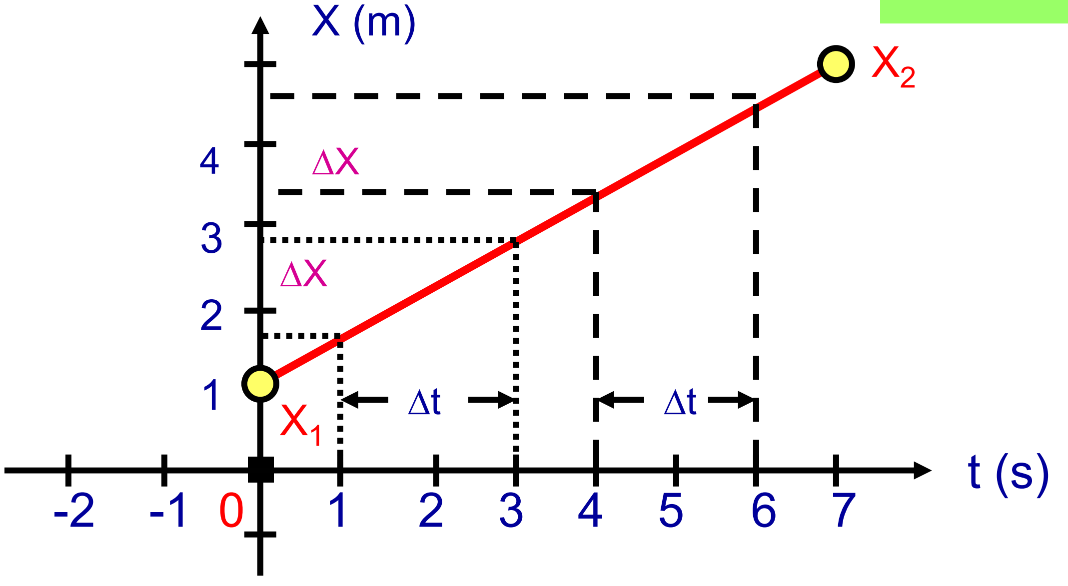
- Prendiamo il grafico che mostra la posizione di un corpo in funzione del tempo. La linea rossa rappresenta la legge oraria del corpo.



- Prendiamo due punti qualsiasi sul grafico (t_1, t_2). La velocità media esprime la pendenza della retta che unisce il punto iniziale ed il punto finale.

- Così facendo abbiamo approssimato la vera legge oraria con una retta.

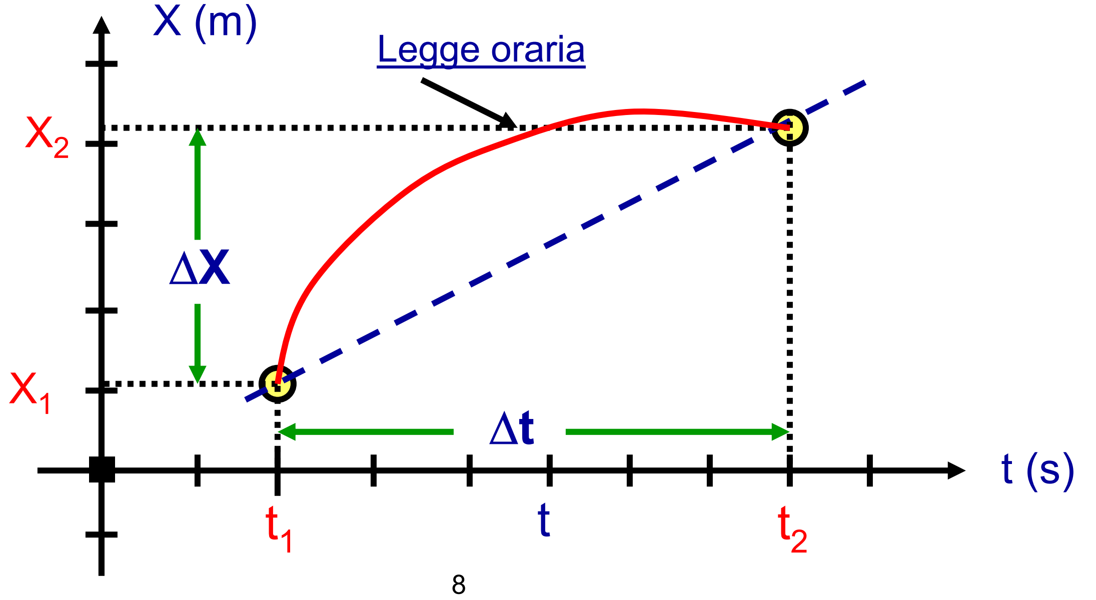
Moto rettilineo uniforme



- Il moto avviene lungo una retta
- La velocità media è la stessa per qualsiasi Δt da noi scelto

$$\boxed{v_{media} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} = \text{costante}}$$

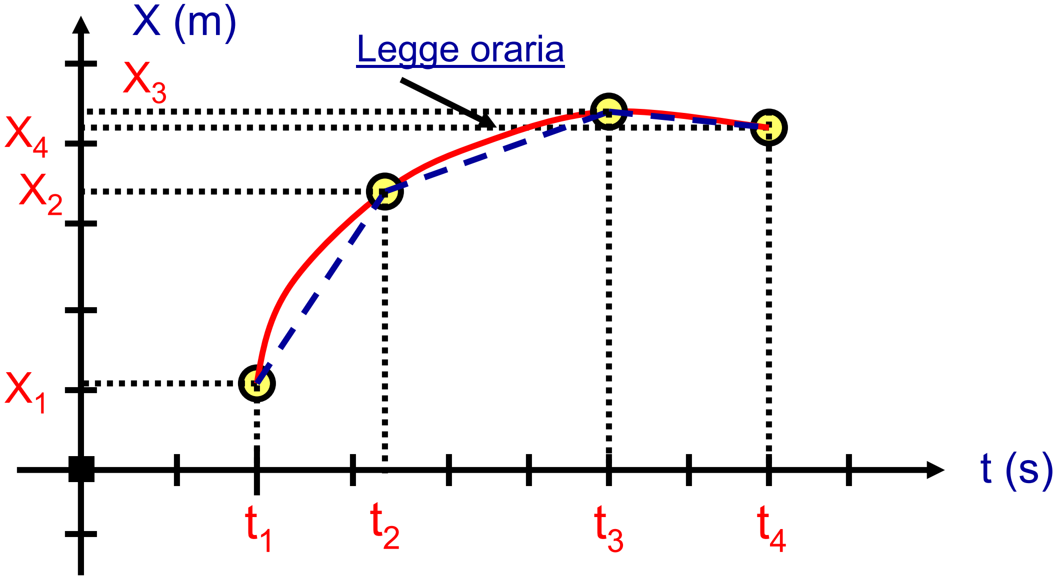
- Quando parliamo di velocità media stiamo approssimando il moto qualsiasi di un corpo tra X_1 e X_2 con un modo rettilineo uniforme



Velocità istantanea

- La conoscenza della velocità media corrispondente allo spostamento ΔX non ci dà informazioni sulla velocità della particella durante l'intervallo di tempo in cui è avvenuto lo spostamento.

- Per ovviare a questo problema si può pensare di ridurre l'intervallo Δt in tanti intervalli Δt più piccoli, in modo che l'approssimazione del moto qualsiasi con un moto rettilineo uniforme migliori (ovvero si approssima il moto qualsiasi con una somma di moti rettilinei uniformi).



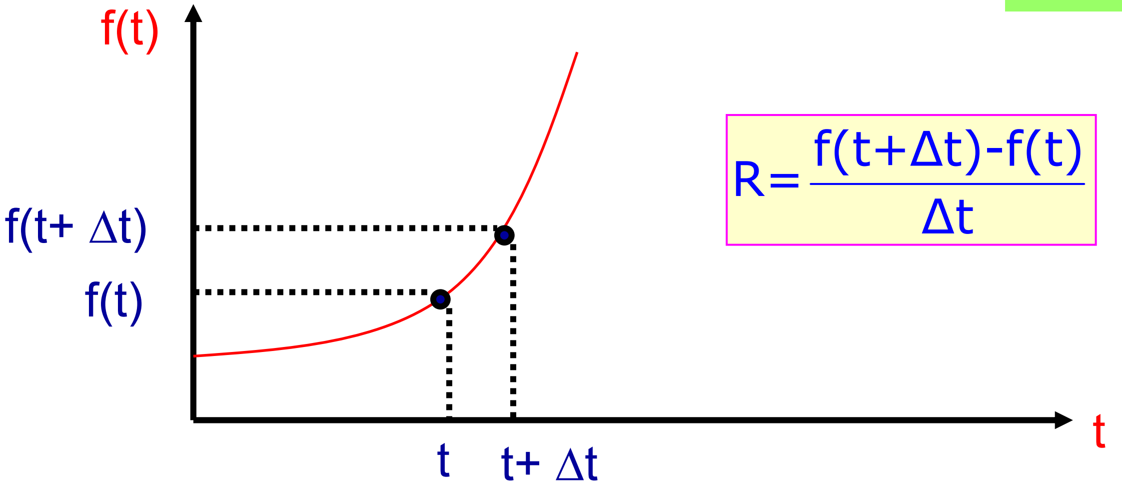
- In questo caso particolare la velocità media dei tre intervalli Δt è diversa nei tre intervalli (in particolare nel terzo intervallo è negativa perché il corpo torna indietro) ed è diversa dalla velocità media nell'intervallo $\Delta t = t_4 - t_1$

- Per conoscere la velocità media nell'intorno di un punto qualsiasi della traiettoria occorre ridurre sempre più l'intervallo, fino a farlo diventare un intervallo infinitesimo.

- La definizione di velocità istantanea del punto al tempo t_1 è la seguente:

$$\boxed{v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}}$$

Derivata



$$R = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

- Si prenda una funzione qualsiasi f(t)
- Si costruisce il rapporto incrementale R

- Si definisce la derivata della funzione f(t) il limite del rapporto incrementale R per Δt che tende a zero.

$$f'(t) \equiv \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

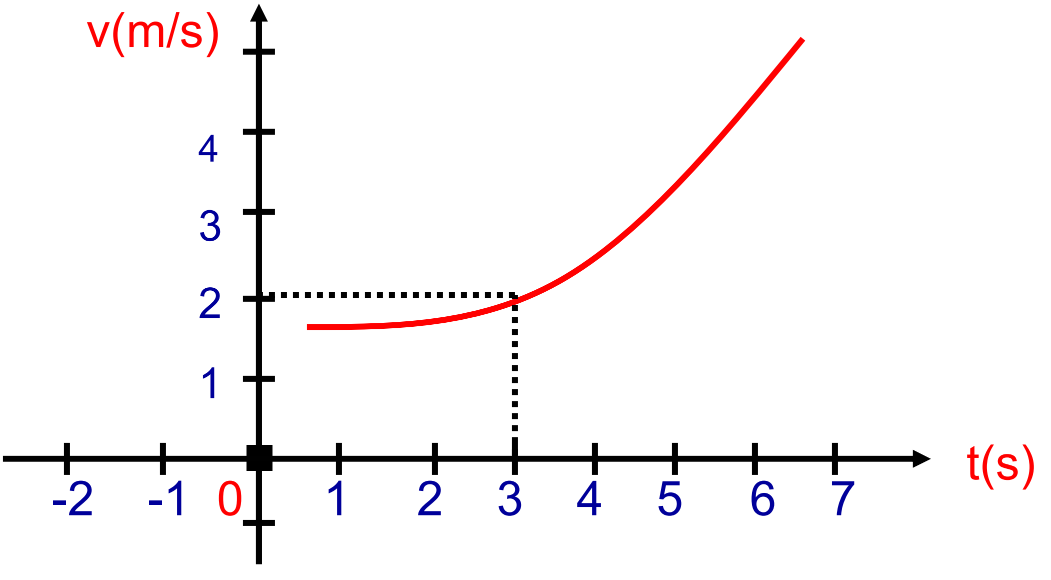
- La velocità istantanea è la derivata rispetto al tempo della funzione x(t) [legge oraria]

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

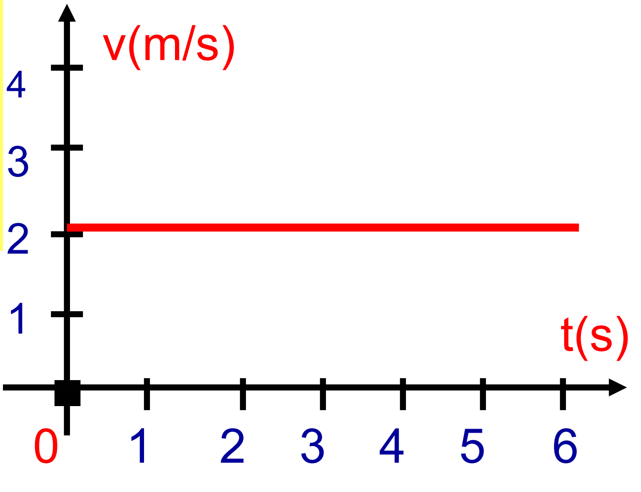
- Alcuni esempi:
  - $x(t) = \text{costante} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = 0$
  - $x(t) = A + B \cdot t \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = B$
  - $x(t) = A \cdot t^2 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = 2At$
  - $x(t) = A \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cdot \cos(\omega t)$
  - $x(t) = \log(t) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

Accelerazione

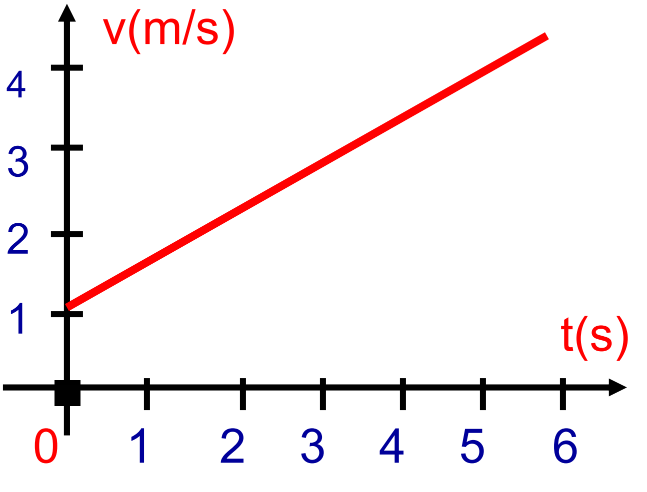
- La velocità istantanea è definita per ogni istante di tempo t; abbiamo cioè una funzione v(t).
- Possiamo costruire il grafico seguente:



- Due casi particolari:



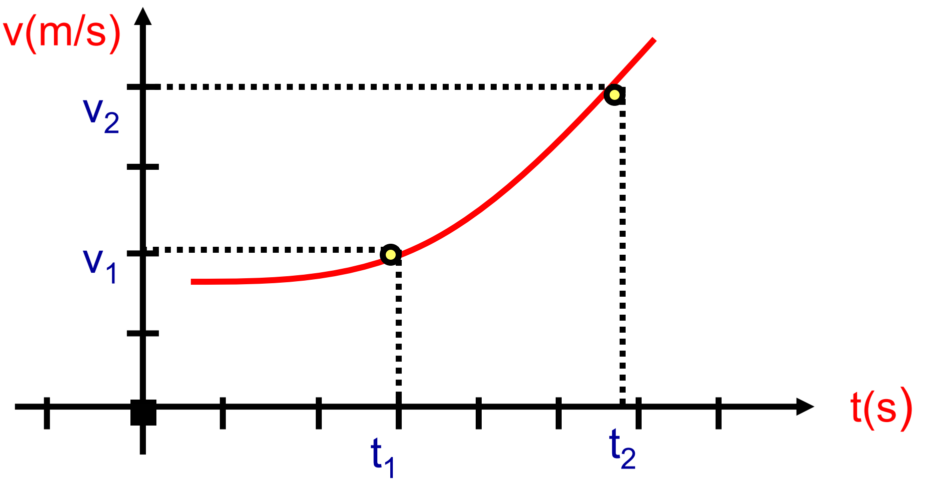
Moto rettilineo uniforme



Moto uniformemente accelerato

Accelerazione

- Per definire l’accelerazione si può applicare di nuovo quanto detto a proposito della velocità
- L’accelerazione è una misura della variazione della velocità rispetto al tempo:



- Accelerazione media:

$$a_{media} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

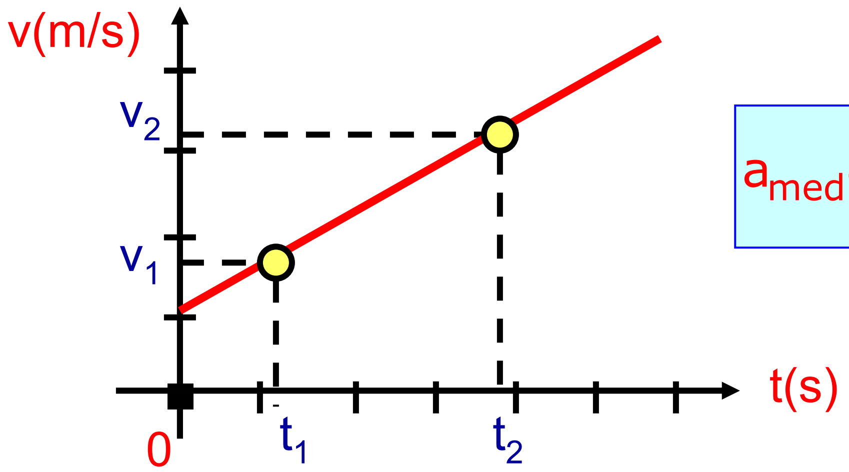
Si misura in m/s²

- L’accelerazione ha un segno che può essere diverso rispetto al segno della velocità
  - Se voi siete in automobile e frenate, l’auto continua ad andare avanti ma l’accelerazione è diretta all’indietro
- Accelerazione istantanea:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

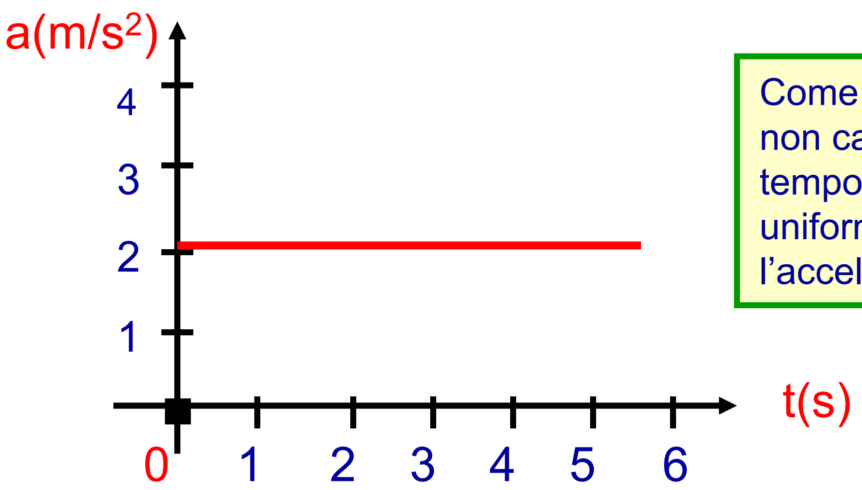
- L’accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità ovvero è la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo.

Moto uniformemente accelerato



$$a_{media} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

- Nel moto uniformemente accelerato l'accelerazione media è la stessa qualunque sia l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ scelto.
- Facciamo il grafico dell'accelerazione istantanea in funzione del tempo nel caso del moto uniformemente accelerato:



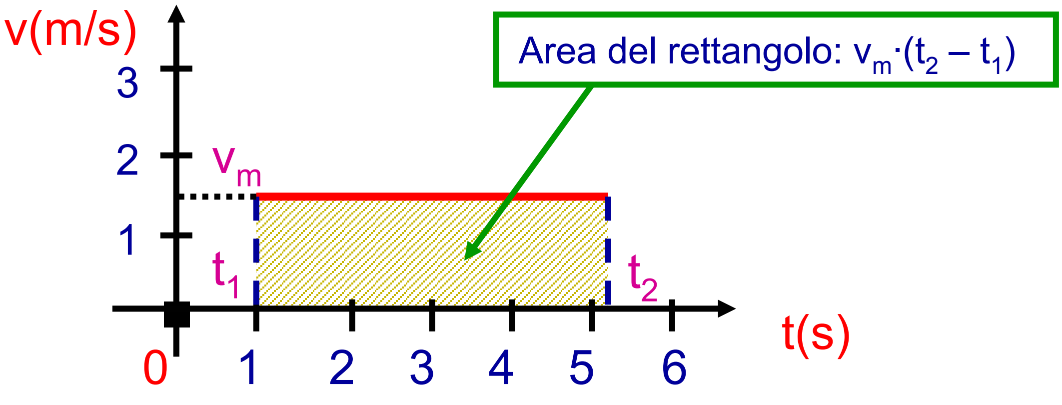
Come si vede l'accelerazione non cambia in funzione del tempo, ovvero nel moto uniformemente accelerato l'accelerazione è costante.

- Molti dei moti che studieremo, e che avvengono in natura, sono di questo tipo:
  - Caduta di un grave in prossimità della superficie della terra
  - Moto di un elettrone in un tubo a raggi catodici
  - Etc…

N.B. Non ha nessuna importanza la derivata dell'accelerazione

Problema: trovare lo spostamento conoscendo la velocità.

- Caso semplice: moto rettilineo uniforme.



- Supponiamo che tra gli istanti t_1 e t_2 il punto si sia mosso con velocità costante v_m, allora abbiamo:

$$v_m = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \boxed{X_2 - X_1 = v_m \cdot (t_2 - t_1)}$$

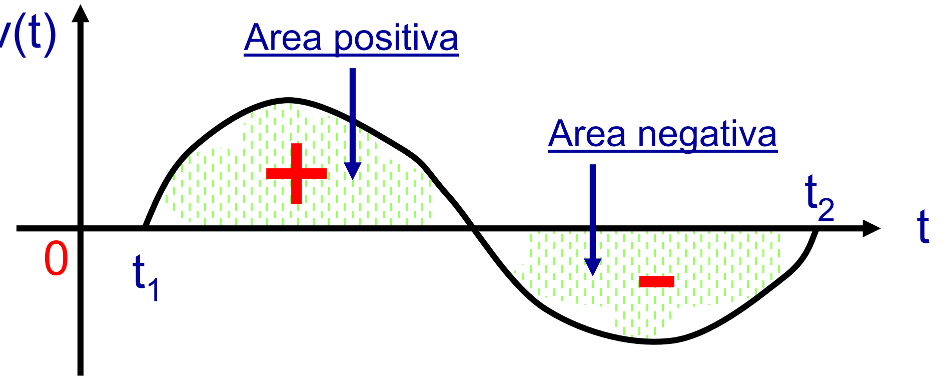
- <u>Lo spostamento</u> ($X_2 - X_1$) <u>è uguale all'area compresa tra il grafico della velocità e l'asse dei tempi.</u>

- Per conoscere il punto finale X_2 occorre conoscere il punto iniziale X_1.

$$\boxed{X_2 = X_1 + v_m \cdot (t_2 - t_1)}$$

- Riassumendo: per trovare il punto di arrivo di un corpo che si sta muovendo con velocità costante, occorre conoscere:
  - La velocità del corpo
  - L'intervallo di tempo ($t_2 - t_1$) nel quale è avvenuto il moto
  - Il punto di partenza (condizione al contorno)

Velocità → spazio: caso generale



- L’area racchiusa al di sopra dell’asse dei tempi (velocità positive) è positiva; l’area racchiusa al di sotto dell’asse dei tempi (velocità negative) è negativa.

- Lo spostamento del corpo tra gli istanti t_1 e t_2 corrisponde all’area racchiusa dalla curva, presa con i segni corrispondenti.

- Per conoscere la posizione finale occorre conoscere a priori (dato del problema) la posizione iniziale.

- Problema: come calcolare l’area racchiusa dalla curva? Risposta: integrale definito.

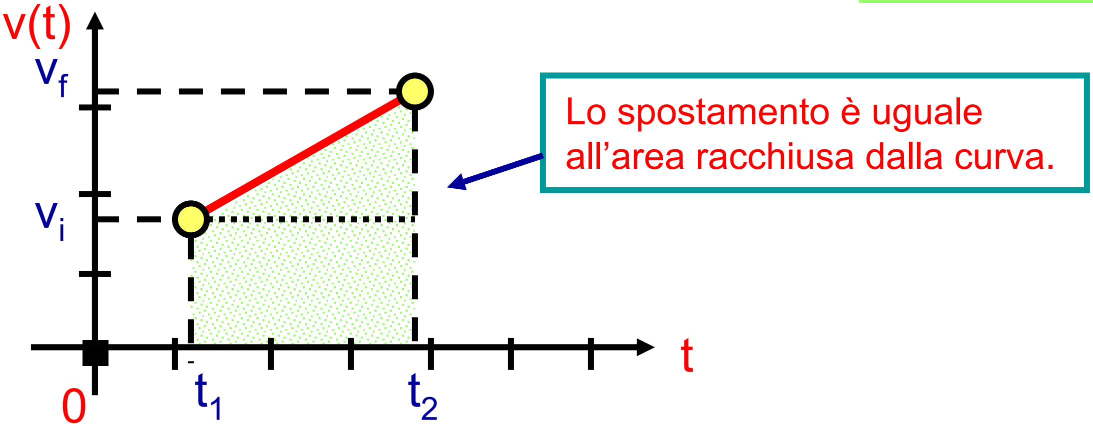
$$\boxed{\text{Spostamento} \equiv S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt}$$

- Esempio: moto rettilineo uniforme, $v(t) = v_m$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v_m dt = v_m \int_{t_1}^{t_2} dt = v_m \cdot t\Big|_{t_1}^{t_2} = v_m \cdot \left(t_2 - t_1\right)$$

- Nel caso di figure geometriche semplici (rettangoli, triangoli, circonferenze, etc) possiamo calcolarne l’area anche senza ricorrere all’integrale definito.

Velocità → spazio: esempio



- Esempio: un corpo si muove di moto uniformemente accelerato tra gli istanti di tempo t_1 e t_2. All'istante iniziale il corpo ha velocità pari a v_i.

- Lo spostamento è pari all'area racchiusa dalla curva. In questo caso semplice possiamo calcolare l'area anche senza risolvere l'integrale definito.

- La curva corrisponde ad un rettangolo con sovrapposto un triangolo:
  - Rettangolo: base = $t_2 - t_1$; altezza = v_i → area = $(t_2 - t_1) \cdot v_i$
  - Triangolo: base = $t_2 - t_1$; altezza = $v_f - v_i$ → area = $\frac{1}{2}(t_2 - t_1) \cdot (v_f - v_i)$
  - Area totale = area_rettangolo + area_triangolo =

$$= (t_2 - t_1) \cdot v_i + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)(v_f - v_i) = (t_2 - t_1)\frac{v_f + v_i}{2} = \Delta t \cdot v_m$$

$$\Rightarrow \quad X_2 = X_1 + \Delta t \cdot v_m$$