LIMITI - ESERCIZI SVOLTI

1) Verificare mediante la definizione di limite che

$$(a)\quad \lim_{x\to 2}(3x-5)=1, \qquad (b)\quad \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty,$$

$$(c)\quad \lim_{n\to +\infty}\frac{3n^2}{n+1}=+\infty, \qquad (d)\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{3x+1}{x-2}=3.$$

2) Calcolare, utilizzando i teoremi sull'algebra dei limiti

$$(a)\quad \lim_{x\to -\infty}(x^3+x), \qquad (b)\quad \lim_{x\to +\infty} x2^x,$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}, \qquad (d)\quad \lim_{x\to \pm\infty}\frac{1}{1+x^2},$$

$$(e)\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^{\pm}}\frac{1}{\cos x}, \qquad (f)\quad \lim_{x\to +\infty}(\sqrt[5]{x}+2^{-x}).$$

3) Calcolare i seguenti limiti di forme indeterminate

$$(a)\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x^3-1}\right), \qquad (b)\quad \lim_{x\to 2^{\pm}}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4},$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{3x^2-x}{x^5+2x^2} \qquad (d)\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^{5/2}-2x\sqrt{x}+1}{2x^{5/2}-1},$$

$$(e)\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{-2x^3+x+1}{x^2+3x}, \qquad (f)\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{3x^4+9x-1}{-x^4+6x^3+1}.$$

4) Calcolare i seguenti limiti mediante razionalizzazione

$$(a)\quad \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}), \qquad (b)\quad \lim_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}),$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \qquad (d)\quad \lim_{x\to -\infty}(\sqrt{4+x^2}+x).$$

5) Calcolare mediante cambiamenti di variabili

$$(a)\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2},\qquad (b)\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{4+x^2}},\qquad (c)\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\sqrt{1+2\log^2 x}}.$$

6) Studiando il segno della funzione, calcolare

$$\lim_{x\to -1^\pm}[x^3-x]$$

($[t]$ = parte intera di t).

7) Limiti di successioni

$$(a)\lim_{n\to+\infty}\sin(2n\pi)\qquad (b)\lim_{n\to+\infty}\sin(n!\pi)\qquad (c)\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}\qquad (d)\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)!-n!}{(n+1)!(2n+1)}$$

8) Calcolare i seguenti limiti, utilizzando i teoremi del confronto

(a) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+\cos x)$, (b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$,

(c) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cos x$, (d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sin x}{3x+\cos x}$,

(e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}$, (f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(3+\sin x)}{x^3}$,

(g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x}{x+1}(e-e^{\sin x})$, (h) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x}{x+1}(e-2^{\sin x})$,

(i) $\lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}$, (l) $\lim_{x\to-\infty}(8x+x\sin^2 x)$.

9) Calcolare, usando limiti notevoli

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$, (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+4x)}{x}$,

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^2}$, (d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\sin x}\right)$,

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$, (f) $\lim_{x\to-\infty}x(3^{1/x}-1)$,

(g) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\log\left(\frac{x}{2}\right)}$, (h) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$,

(i) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[5]{x})$, (l) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$.

10) Calcolare, usando limiti notevoli

(a) $\lim_{x\to-\infty} x\sin\frac{1}{x}$, (b) $\lim_{x\to1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-\sqrt{x}}$,

(c) $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \left(x+\frac{\pi}{2}\right)\tan^2 x$, (d) $\lim_{x\to1} \frac{\sin\pi x}{x-1}$,

(e) $\lim_{x\to0} \frac{\tan^2 x}{\tan(\sin x)}$, (f) $\lim_{x\to0} \frac{e^{\sqrt{x+1}}-e}{x}$,

(g) $\lim_{x\to0} \frac{\log(2-\cos x)}{\sin^2 x}$, (h) $\lim_{x\to0} \frac{\log(x+\cos x)}{x}$,

(i) $\lim_{x\to+\infty} x(\log(x+2)-\log(x+1))$, (l) $\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{\cos(3x)+1}$.

11) Calcolare i limiti delle seguenti forme indeterminate di tipo esponenziale

(a) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$, (b) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$,

(c) $\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$, (d) $\lim_{x\to0^+} x^x$,

(e) $\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, (f) $\lim_{x\to0^+} (\log^2 x)^{\sin x}$,

(g) $\lim_{x\to0^+} (1+\log^2 x)^{\sin x}$, (h) $\lim_{x\to0^+} (1+e^{(1/x^3)})^{\sin x}$.

12) Calcolare, usando limiti notevoli

(a) $\lim_{x\to0^+} \sin x\log\left(\frac{1}{x}\right)$, (b) $\lim_{x\to0^+} x\log^2 x$,

(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^3 x}{x^2}$, (d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log\log x}$,

(e) $\lim_{x\to+\infty} 2^{-x}x^x$, (f) $\lim_{x\to+\infty} (3^{(x^2)}-(3^x)^2)$.

SOLUZIONI

1) In questo esercizio utilizzeremo la definizione di limite.

1a) Per verificare che

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)=1$$

fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo la differenza

$$|f(x)-l| = |(3x-5)-1| = |3x-6| = 3|x-2|.$$

Affinché si abbia $|f(x)-l| < \varepsilon$ è sufficiente scegliere x tale che $3|x-2| < \varepsilon$, ovvero $|x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

1b) Per verificare che

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

fissiamo $R > 0$ e consideriamo la condizione

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > R.$$

Essa equivale a

$$(x-1)^2 < \frac{1}{R},$$

ovvero

$$|x-1| < \delta = \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

1c) Per verificare che

$$\lim_{n\to +\infty}\frac{3n^2}{n+1} = +\infty$$

fissato $R > 0$ consideriamo la disuguaglianza

$$\frac{3n^2}{n+1} > R.$$

Per $n \geq 1$, si ha sempre $n+1 \leq n+n = 2n$ e quindi

$$\frac{3n^2}{n+1} \geq \frac{3n^2}{2n} = \frac{3}{2}n.$$

Se $\frac{3}{2}n > R$, ovvero $n > K = \frac{2}{3}R$ segue a maggior ragione che

$$\frac{3n^2}{n+1} > R.$$

1d) Per verificare che
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{x-2}=3$$
fissiamo $\varepsilon>0$ e consideriamo
$$|f(x)-l|=\Big|\frac{3x+1}{x-2}-3\Big|=\frac{7}{3}\frac{1}{|x-2|}.$$
Affinché si abbia $|f(x)-l|<\varepsilon$ è sufficiente scegliere x tale che $\frac{7}{3}\frac{1}{|x-2|}<\varepsilon$, ovvero $|x-2|>\frac{7}{3}\frac{1}{\varepsilon}$, con $x<0$, cioè, $x<2-\frac{7}{3\varepsilon}=-R$.

2) In questo esercizio utilizzeremo i Teoremi sul limite di somma, prodotto, quoziente.

2a) Poiché x^3 e x tendono a $-\infty$ per $x\to-\infty$, per il Teorema sul limite di una somma, nel caso di limiti infiniti e con lo stesso segno, si ha
$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+x)=-\infty.$$

2b) Tenendo conto che 2^x tende a $+\infty$ per $x\to+\infty$, applicando il Teorema sul limite del prodotto, e tenendo conto del segno dei fattori, segue che
$$\lim_{x\to+\infty}x2^x=+\infty.$$

2c) Per il Teorema sul limite del quoziente di funzioni a limite finito e denominatore non infinitesimo, si ha
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}=1.$$

2d) Utilizzando lo stesso Teorema, ma nel caso di denominatore a limite infinito si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=0.$$

2e) Per calcolare
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}}\frac{1}{\cos x}$$
ricordiamo che il limite del reciproco di una funzione infinitesima non necessariamente esiste. In questo caso, poiché $\cos x>0$ in un intorno sinistro di $\frac{\pi}{2}$ si ha
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\cos x}=+\infty.$$
Al contrario, poiché $\cos x<0$ in un intorno destro di $\frac{\pi}{2}$ si ha
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\cos x}=-\infty.$$

$2f$) Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x}+2^{-x})$$

basta osservare che

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x}=+\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}2^{-x}=0$$

ed applicare il Teorema sul limite della somma: il limite assegnato vale $+\infty$.

3) I limiti di questo esercizio sono forme indeterminate del tipo $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

$3a$) Il limite

$$\lim_{x\to1}(\frac{x^2-1}{x^3-1})$$

è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Semplificando i fattori comuni a numeratore e denominatore si ha

$$\lim_{x\to1}(\frac{x^2-1}{x^3-1})=\lim_{x\to1}(\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to1}(\frac{(x+1)}{(x^2+x+1)}=\frac{2}{3}.$$

$3b$) Analogamente

$$(b)\ \lim_{x\to2^\pm}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to2^\pm}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}=$$
$$=\lim_{x\to2^\pm}\frac{(x-3)}{(x-2)}=\mp\infty,$$

dove si è tenuto conto del segno della funzione nell'intorno sinistro e destro di $x_0=2$.

$3c$) Con lo stesso metodo

$$\lim_{x\to0^\pm}\frac{3x^2-x}{x^5+2x^2}=\lim_{x\to0^\pm}\frac{x(3x-1)}{x^2(x^3+2)}=$$
$$=\lim_{x\to0^\pm}\frac{1}{x}\lim_{x\to0^\pm}\frac{3x-1}{x^3+2}.$$

Il primo fattore non ha limite, ma

$$\lim_{x\to0^\pm}\frac{1}{x}=\pm\infty.$$

Il secondo fattore ha limite finito

$$\lim_{x\to0^\pm}\frac{3x-1}{x^3+2}=-\frac{1}{2}.$$

Pertanto, applicando il Teorema sul limite del prodotto, si ha

$$\lim_{x\to0^\pm}\frac{3x^2-x}{x^5+2x^2}=\mp\infty.$$

3d) Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2} - 2x\sqrt{x} + 1}{2x^{5/2} - 1}$$

conviene raccogliere a fattore comune la potenza di x con esponente più alto che appare in numeratore e denominatore, ovvero $x^{\frac{5}{2}}$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2} - 2x\sqrt{x} + 1}{2x^{5/2} - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}(1 - 2x^{-1} + x^{-\frac{5}{2}})}{x^{5/2}(2 - x^{-\frac{5}{2}})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1 - 2x^{-1} + x^{-\frac{5}{2}})}{(2 - x^{-\frac{5}{2}})} = \frac{1}{2}$$

3e)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3 + x + 1}{x^2 + 3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(-2 + x^{-2} + x^{-3})}{x^2(1 + 3x^{-1})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{(-2 + x^{-2} + x^{-3})}{(1 + 3x^{-1})} = -\infty.$$

3f)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4 + 9x - 1}{-x^4 + 6x^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4(3 + 9x^{-3} - x^{-4})}{x^4(-1 + 6x^{-1} + x^{-4})} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3 + 9x^{-3} - x^{-4}}{-1 + 6x^{-1} + x^{-4}} = -3.$$

4) Calcoliamo i seguenti limiti mediante razionalizzazione.

4a) Applicando il prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a - b)(a - b)$ abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x + 1 - x}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 0$$

4b) Applicando il prodotto notevole $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + 1 - x}{(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{x^2})} = 0$$

4c) Operando come in 4a) abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - 1 + x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1$$

4d)

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4+x^2}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{4+x^2}+x)(\sqrt{4+x^2}-x)}{(\sqrt{4+x^2}-x)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4+x^2-x^2}{\sqrt{4+x^2}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{4+x^2}-x} = 0.$$

5) Calcoliamo i seguenti limiti mediante cambiamenti di variabili.

5a)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2}$$

Posto $y = f(x) = e^x$ si ha che $y = e^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$: il Teorema di cambiamento di variabili è quindi applicabile. Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^3+1}{y^2+2} = +\infty.$$

Se invece $x \to -\infty$ allora $y = e^x \to 0$: il Teorema di cambiamento di variabili è ancora applicabile perchè la funzione

$$g(y) = \frac{y^3+1}{y^2+2}$$

è continua per $y = 0$. Si ha pertanto

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2} = \lim_{y\to0}\frac{y^3+1}{y^2+2} = \frac{1}{2}.$$

5b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{4+x^2}}$$

Posto $y = -x$ si ha che $y = -x \to +\infty$ per $x \to -\infty$, e quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{-3y}{\sqrt{4+y^2}} =$$

$$= -\lim_{y\to+\infty}\sqrt{\frac{9y^2}{4+y^2}} = -3$$

5c)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{\sqrt{1+2\log^2 x}}$$

Posto $y = f(x) = \log x$ si ha che $y = \log x \to -\infty$ per $x \to 0^+$; pertanto

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{\sqrt{1+2\log^2 x}} = \lim_{y\to-\infty}\frac{y}{\sqrt{1+2y^2}} =$$

$$= -\lim_{y\to-\infty}\sqrt{\frac{y^2}{1+2y^2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}},$$

dove si è tenuto conto che per $y < 0$ vale $y = -\sqrt{y^2}$.

6) Per calcolare

$$\lim_{x\to-1^{\pm}}[x^3 - x]$$

dove $[t]$ = indica la parte intera di t, conviene studiare il segno della funzione $f(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ nell'intorno di $x = -1$. Si ha $f(x) < 0$ per x in un intorno sinistro di $x = -1$ e $f(x) > 0$ in un intorno destro di $x = -1$. Inoltre f è continua in $x = -1$. Segue che

$$[f(x)] = \begin{cases} -1 & \text{se } -1-\delta < x < -1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < -1+\delta \end{cases}$$

per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo. Quindi

$$\lim_{x\to-1^-}[x^3 - x] = -1 \qquad \lim_{x\to-1^+}[x^3 - x] = 0$$

7) Limiti di successioni

7*a*) Tenendo conto che $\sin(2n\pi) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\sin(2n\pi) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

7*b*) Analogamente al caso precedente, poichè $\sin(n!\pi) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\sin(n!\pi) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

7*c*) Ricordando che

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N},$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3!(n-3)!}{2!(n-2)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n-2} = 0.$$

7*d*)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)! - n!}{(n+1)!(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)(n+1)n! - n!}{(n+1)!(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n![(n+1)(n+2)-1]}{n!(n+1)(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n+1}{2n^2+3n+2} = \frac{1}{2}.$$

8) Per calcolare i seguenti limiti, utilizzeremo i teoremi del confronto.

$8a$) Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+\cos x)$$

osserviamo che $\sqrt{x}-\cos x \geq \sqrt{x}-1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poichè

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-1)=+\infty$$

applicando il Teorema del confronto otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+\cos x)=+\infty.$$

$8b$) Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

osserviamo che $-1 \leq \cos x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui segue

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x \neq 0.$$

Poichè

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

si ha che anche

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}=0.$$

$8c$) Il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cos x$$

non esiste. Infatti, posto $f(x)=\sqrt{x}\cos x$, $x_n=\frac{\pi}{2}+n\pi$, e $x'_n=2n\pi$, si ha

$$f(x_n)=0\to 0, \quad f(x'_n)=\sqrt{2n\pi}\to+\infty.$$

$8d$) Vogliamo calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sin x}{3x+\cos x}.$$

Sapendo che $|\sin x|, |\cos x| \leq 1$, deduciamo che

$$\frac{2x-1}{3x+1} \leq \frac{2x-\sin x}{3x+\cos x} \leq \frac{2x+1}{3x-1}$$

per ogni $x > 1/3$. Poichè

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{2}{3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{3x-1}$$

dal Teorema del confronto deduciamo che anche

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sin x}{3x+\cos x}=\frac{2}{3}.$$

8e) Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x}$$

ricordiamo che $x-1 < [x] \le x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$\frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} \le 1, \quad \forall x \ne 0.$$

Applicando il Teorema del confronto segue subito che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1.$$

8f) Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3+\sin x)}{x^3}$$

osserviamo che, essendo $|\sin x| \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale

$$2 \le (3+\sin x) \le 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Essendo $f(t) = \log t$ una funzione monotona crescente, si ha inoltre

$$\log 2 \le \log(3+\sin x) \le \log 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pertanto

$$\frac{\log 2}{x^3} \le \frac{\ln(3+\sin x)}{x^3} \le \frac{\log 4}{x^3} \quad \forall x > 0$$

da cui, per il Teorema del confronto, segue che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3+\sin x)}{x^3} = 0.$$

8g) Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x}{x+1}(e - e^{\sin x})$$

non esiste. Infatti, posto

$$f(x) = \frac{x^2-5x}{x+1}(e - e^{\sin x}),$$

e scelte le successioni $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x'_n = 2n\pi$ si ha $f(x_n) \to 0$, mentre

$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = \lim_{y\to+\infty} = \frac{y^2-5y}{y+1}(e-1) = +\infty.$$

8h) Per calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x}{x+1}(e-2^{\sin x})$$
osserviamo che
$$e-2^{\sin x}\geq e-2\quad\forall x\in\mathbb{R},$$
da cui
$$\frac{x^2-5x}{x+1}(e-2^{\sin x})\geq\frac{x^2-5x}{x+1}(e-2)\quad\forall x>5.$$
Poichè,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x}{x+1}(e-2)=+\infty,$$
applicando il Teorema del confronto si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x}{x+1}(e-2^{\sin x})=+\infty.$$

8i) Per calcolare
$$\lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}$$
si può osservare che
$$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1\quad\forall x\neq 0$$
da cui
$$\left|\sin x\sin\frac{1}{x}\right|\leq|\sin x|\quad\forall x\neq 0.$$
Poichè
$$\lim_{x\to 0}|\sin x|=0,$$
anche
$$\lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0.$$

8l) Per calcolare
$$\lim_{x\to-\infty}(8x+x\sin^2 x)$$
osserviamo che
$$8\leq 8+\sin^2 x\leq 9,$$
da cui
$$9x\leq x(8+\sin^2 x)\leq 8x\quad\forall x<0.$$
Applicando il Teorema del confronto si ha quindi che
$$\lim_{x\to-\infty}(8x+x\sin^2 x)=-\infty.$$

9) Calcoliamo i limiti seguenti utilizzando i limiti notevoli.

9a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

9b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}=\lim_{x\to 0}4\frac{\ln(1+4x)}{4x}=$$
$$=\lim_{y\to 0}4\frac{\ln(1+y)}{y}=4,$$

dove abbiamo operato il cambiamento di variabile $4x=y$.

9c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}\Big(1-\frac{1}{\cos x}\Big)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x\cos x}=0.$$

9d)

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\sin x}\Big)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{\sin x\tan x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\cos x=0,$$

dove si è tenuto conto del risultato del limite 9c).

9e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\cdot\log 2=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\log 2=\log 2,$$

dove si è operato il cambiamento di variabile $x\log 2=y$.

9f)

$$\lim_{x\to-\infty}x(3^{1/x}-1)=\lim_{y\to 0^-}\frac{3y-1}{y}=\log 3,$$

dove si è posto $1/x=y$.

9g) Per calcolare

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\log(\frac{x}{2})}$$

si può porre $x-2=y$ ed ottenere

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(\frac{y+2}{2})}=\lim_{y\to 0}2\cdot\frac{y/2}{\log(1+\frac{y}{2})}=2.$$

9h) Per calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$$

poniamo $x-1=y$. Abbiamo pertanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{y+1}-y-1}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\Big(\frac{(y+1)^{1/2}-1}{y}-1\Big) = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}.$$

9i)

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[5]{x}) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x}\Big(\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}-1\Big) =$$

Ponendo $1/x=y$ si ha

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{y}} \cdot \frac{\sqrt[5]{1+y}-1}{y} \cdot y = \lim_{y\to 0} y^{4/5} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+y}-1}{y} = 0.$$

9l)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x\Big(1-(\frac{3}{2})^x\Big)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2^x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-(\frac{3}{2})^x}{x} = -\log\frac{3}{2}.$$

10) Calcoliamo i seguenti limiti usando i limiti notevoli.

10a) Per calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} x\sin\frac{1}{x}$$

poniamo $1/x=y$ ed abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{y}\sin y = 1.$$

10b) Per calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\Big(\frac{\pi}{2}x\Big)}{1-\sqrt{x}}$$

poniamo $x-1=y$ ed abbiamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\Big(\frac{\pi}{2}x\Big)}{1-\sqrt{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\Big(\frac{\pi}{2}(y+1)\Big)}{1-\sqrt{y+1}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin\Big(\frac{\pi}{2}y\Big)}{\sqrt{y+1}-1} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin\Big(\frac{\pi}{2}y\Big)}{y} \cdot \frac{y}{\sqrt{y+1}-1} = \frac{\pi}{2}\cdot 2 = \pi.$$

10c) Per calcolare

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)\tan^2 x$$

poniamo $x+\pi/2=y$ e abbiamo

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)\tan^2 x=\lim_{y\to 0+} y\tan^2\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big)=\lim_{y\to 0+} y\cdot\frac{1}{\tan^2 y}=+\infty.$$

10d) Per calcolare

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$$

poniamo $x-1=y$ e abbiamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi y+\pi)}{y}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin \pi y}{y}=-\pi.$$

10e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\tan(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\tan(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan(\sin x)}.$$

Ma ponendo $\sin x=y$ per il secondo limite si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan(\sin x)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}=1.$$

Complessivamente si ottiene che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\tan(\sin x)}=0.$$

10f)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x+1}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^{\sqrt{x+1}-1}-1)}{x}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\sqrt{x+1}-1)}-1}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}.$$

Per calcolare il limite del primo fattore possiamo porre $\sqrt{x+1}-1=y$ e abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\sqrt{x+1}-1)}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1.$$

Per calcolare il limite del secondo, razionalizzando, otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

Complessivamente, applicando il Teorema sul limite del prodotto, abbiamo quindi che

$$e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x+1}-1}-1}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=e\cdot 1\cdot\frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x+1}}-e}{x}=\frac{e}{2}.$$

$10g)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(1-\cos x))}{(1-\cos x)}\cdot\frac{(1-\cos x)}{\sin^2 x}.$$

Osserviamo che il primo fattore ha limite 1, in quanto, con la sostituzione $y=1-\cos x$ ci si riconduce ad un limite notevole:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(1-\cos x))}{(1-\cos x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1.$$

Calcoliamo il limite del secondo fattore

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}.$$

$10h)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\Big(\cos x(\frac{x}{\cos x}+1)\Big)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log\cos x}{x}+\frac{\log\Big(1+\frac{x}{\cos x}\Big)}{x}\right).$$

Possiamo calcolare separatamente il limite di ciascun addendo. Per il primo si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+(\cos x-1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x}.$$

Il primo fattore ha limite 1 perché ponendo $y=\cos x-1$ si riconduce il calcolo ad un limite notevole:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+(\cos x-1)}{\cos x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1.$$

Per il secondo fattore si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x}=0.$$

Calcoliamo ora

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\Big(1+\frac{x}{\cos x}\Big)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log\Big(1+\frac{x}{\cos x}\Big)}{x/\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}.$$

Il primo fattore ha limite 1, potendosi ricondurre ancora al limite notevole

$$\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1,$$

ponendo $y=x/\cos x$. Il secondo fattore tende a 1. Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\Big(1+\frac{x}{\cos x}\Big)}{x}=1.$$

Complessivamente concludiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+\cos x)}{x} = 1.$$

10i)

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+2)-\ln(x+1)) = \lim_{x\to+\infty} x\Big(\ln\Big(x\Big(1+\frac{2}{x}\Big)\Big)-\ln\Big(x\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big)\Big)$$

Tenendo conto che $\log(ab)=\log a+\log b$ se $a,b>0$, si ha

$$= \lim_{x\to+\infty} x\Big(\ln x+\log\Big(1+\frac{2}{x}\Big)-\ln x-\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big) = \lim_{x\to+\infty} x\Big(\log\Big(1+\frac{2}{x}\Big)-\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big).$$

Operando la sostituzione $1/x=y$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x\Big(\log\Big(1+\frac{2}{x}\Big)-\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\frac{\log(1+2y)}{y}-\frac{\log(1+y)}{y}\Big) = 2-1=1.$$

10l) Per calcolare

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{\cos(3x)+1}$$

poniamo $x-\pi=y$ ed abbiamo

$$\lim_{y\to 0} \frac{\cos(y+\pi)+1}{\cos(3y+3\pi)+1} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{1-\cos(3y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2}\cdot\frac{y^2}{1-\cos(3y)}$$

Il primo fattore ha limite $\frac{1}{2}$. Per calcolare il limite del secondo fattore possiamo porre $3y=z$ ed abbiamo

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{1-\cos(3y)} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2/9}{1-\cos z} = \frac{1}{9}\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{1-\cos z} = \frac{2}{9}.$$

Complessivamente si ha dunque

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{\cos(3x)+1} = \frac{1}{9}.$$

11) Forme indeterminate esponenziali

11a)

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\Big[\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x}\Big]^2 = \lim_{y\to e} y^2 = e^2,$$

dove si è posto $y=\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x}$.

11b) Calcoliamo
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}$$
Poichè
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$
segue che esiste $R>0$ tale che
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>2$$
per $x>R$. Pertanto si ha anche
$$\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}>2^x$$
per $x>R$. Applicando ora il Teorema del confronto si ottiene che
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=+\infty.$$

11c) Calcoliamo
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}$$
Poichè
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$
segue che per ogni $\varepsilon>0$ (in particolare, per $0<\varepsilon<e$) esiste $R>0$ tale che
$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e+\varepsilon$$
per ogni $x<-R$. Pertanto si ha anche
$$(e-\varepsilon)^x<\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}<(e+\varepsilon)^x$$
per $x<-R$. Applicando ora il Teorema del confronto si ottiene che
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=0.$$

11d)
$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\log x}=1,$$
perché
$$\lim_{x\to0^+}x\log x=0.$$

11e)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x \log\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\sin x \log x} = 1,$$

perché

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot x \log x = 1 \cdot 0 = 0.$$

11f)

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln^2 x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x \log(\log^2 x)}.$$

Calcoliamo il limite dell'esponente

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \log(\log^2 x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot x \cdot \frac{\log(\log^2 x)}{\log^2 x} \cdot \log^2 x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\log^2 x)}{\log^2 x} \cdot \lim_{x\to 0^+} x \log^2 x.$$

Il primo limite vale 1, ed il terzo vale 0 (limiti notevoli). Per il calcolo del secondo, ponendo $y = \log^2 x$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\log^2 x)}{\log^2 x} = \lim_{y\to +\infty} \frac{\log y}{y} = 0.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \log(\log^2 x) = 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln^2 x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x \log(\log^2 x)} = 1.$$

11g) Con un procedimento analogo a quello dell'esercizio precedente si trova

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \ln^2 x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x \log(1+\log^2 x)} = 1$$

11h)

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + e^{\frac{1}{x^3}})^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x \log(1+e^{1/x^3})}.$$

Riscriviamo

$$\log(1 + e^{1/x^3}) = \log(e^{1/x^3}(1 + e^{-1/x^3})) = \frac{1}{x^3} \log e + \log(1 + e^{-1/x^3})$$

Calcoliamo ora il limite dell'esponente

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \log(1 + e^{1/x^3}) = \lim_{x\to 0^+} \Big(\frac{\sin x}{x^3} + \sin x \log(1 + e^{-1/x^3})\Big).$$

I limiti dei due addendi sono

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \sin x \log(1 + e^{-1/x^3}) = 0.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \log(1 + e^{1/x^3}) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + e^{\frac{1}{x^3}})^{\sin x} = +\infty.$$

12) Calcoliamo i seguenti limiti.

12a)

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0^+} \sin x \log x = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot x \log x = 1 \cdot 0 = 0.$$

12b)

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln^2 x = \lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x} \log x)^2 = 0.$$

12c)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\log x}{x^{2/3}}\right)^3 = 0.$$

12d)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{\log \log x} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{\log y} = +\infty,$$

dove si è posto $\log x = y$.

12e)

$$\lim_{x\to +\infty} 2^{-x} x^x = \lim_{x\to +\infty} e^{-x \log 2} \cdot e^{x \log x} = \lim_{x\to +\infty} e^{x(\log x - \log 2)} = +\infty.$$

12f)

$$\lim_{x\to +\infty} (3^{(x^2)} - (3^x)^2) = \lim_{x\to +\infty} 3^{2x}(3^{(x^2-2x)} - 1) = +\infty.$$