

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 1. *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} .$$

Soluzione. Moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \end{aligned}$$

a questo punto, ponendo $y = 2x$, dato che

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} &= \lim_{y \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin y}{y} = \\ &= 2 \cdot 1 = 2 . \end{aligned}$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 2. *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} .$$

Soluzione. Moltiplichiamo e dividiamo per $(1 + \cos x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

poiché risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 3. *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin(4x)} .$$

Soluzione. Riscriviamo il limite in questo modo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin(4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \frac{1}{\sin(4x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot (1 - \cos x) \cdot \frac{4x}{4x} \cdot \frac{1}{\sin(4x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{4x}{\sin(4x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{4x}{\sin(4x)}$$

dal momento che risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin(4x)} = 1$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{4x}{\sin(4x)} = 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 0 .$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 4. *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2}.$$

Soluzione. Il numeratore è una differenza di cubi, per cui abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x) \end{aligned}$$

poiché risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x + \cos^2 x) = 1 + 1 + 1^2 = 3$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2}.$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 5. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{1 - \cos(3x)}.$$

Soluzione. Riscriviamo il limite in questo modo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{1 - \cos(3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{4x^2} \cdot \sin^2(2x) \cdot \frac{9x^2}{9x^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos(3x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 4x^2 \cdot \frac{\sin^2(2x)}{4x^2} \cdot \frac{1}{9x^2} \cdot \frac{9x^2}{1 - \cos(3x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \right)^2 \cdot \frac{(3x)^2}{1 - \cos(3x)} \end{aligned}$$

dal momento che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{1 - \cos(3x)} = 2$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \right)^2 \cdot \frac{(3x)^2}{1 - \cos(3x)} = \frac{4}{9} \cdot 1^2 \cdot 2 = \frac{8}{9}.$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 6. *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos(5x)}}{x}.$$

Soluzione. Portiamo la x dentro la radice, facendo molta attenzione al fatto che, trattandosi di un limite per $x \rightarrow 0^-$, la x è negativa:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos(5x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{\frac{1 - \cos(5x)}{x^2}}$$

moltiplichiamo e dividiamo dentro la radice per 25:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{\frac{25}{25} \cdot \frac{1 - \cos(5x)}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{25 \cdot \frac{1 - \cos(5x)}{25 x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{25 \cdot \frac{1 - \cos(5x)}{(5x)^2}} = -\sqrt{25 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 7. *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{(1-x)^2}}{3(x-1)^2}.$$

Soluzione. Mettendo un “meno” in evidenza e, osservando che $(1-x)^2 = (x-1)^2$, possiamo riscrivere il limite nel seguente modo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{(1-x)^2}}{3(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{e^{(x-1)^2} - 1}{3(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^{(x-1)^2} - 1}{(x-1)^2}$$

ponendo ora $y = x - 1$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^{(x-1)^2} - 1}{(x-1)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^{y^2} - 1}{y^2}$$

ponendo ora $z = y^2$ abbiamo

$$\lim_{y \rightarrow 0} -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^{y^2} - 1}{y^2} = \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^z - 1}{z} = -\frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}.$$

Esercizi svolti sui limiti

Esercizio 8. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1 + 2x)}{(2 \cos(3x) - 2) \sin x}.$$

Soluzione. Riscriviamo il limite nel modo seguente:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1 - \cos(3x)} \cdot \ln(1 + 2x) \cdot \frac{1}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{9x^2}{9x^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos(3x)} \cdot \frac{2x}{2x} \cdot \ln(1 + 2x) \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{9x^2} \cdot \frac{9x^2}{1 - \cos(3x)} \cdot 2x \cdot \frac{\ln(1 + 2x)}{2x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{9x^2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{9x^2}{1 - \cos(3x)} \cdot \frac{\ln(1 + 2x)}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{9} \cdot \frac{9x^2}{1 - \cos(3x)} \cdot \frac{\ln(1 + 2x)}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} = \\ & \quad -\frac{1}{9} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{9}. \end{aligned}$$