

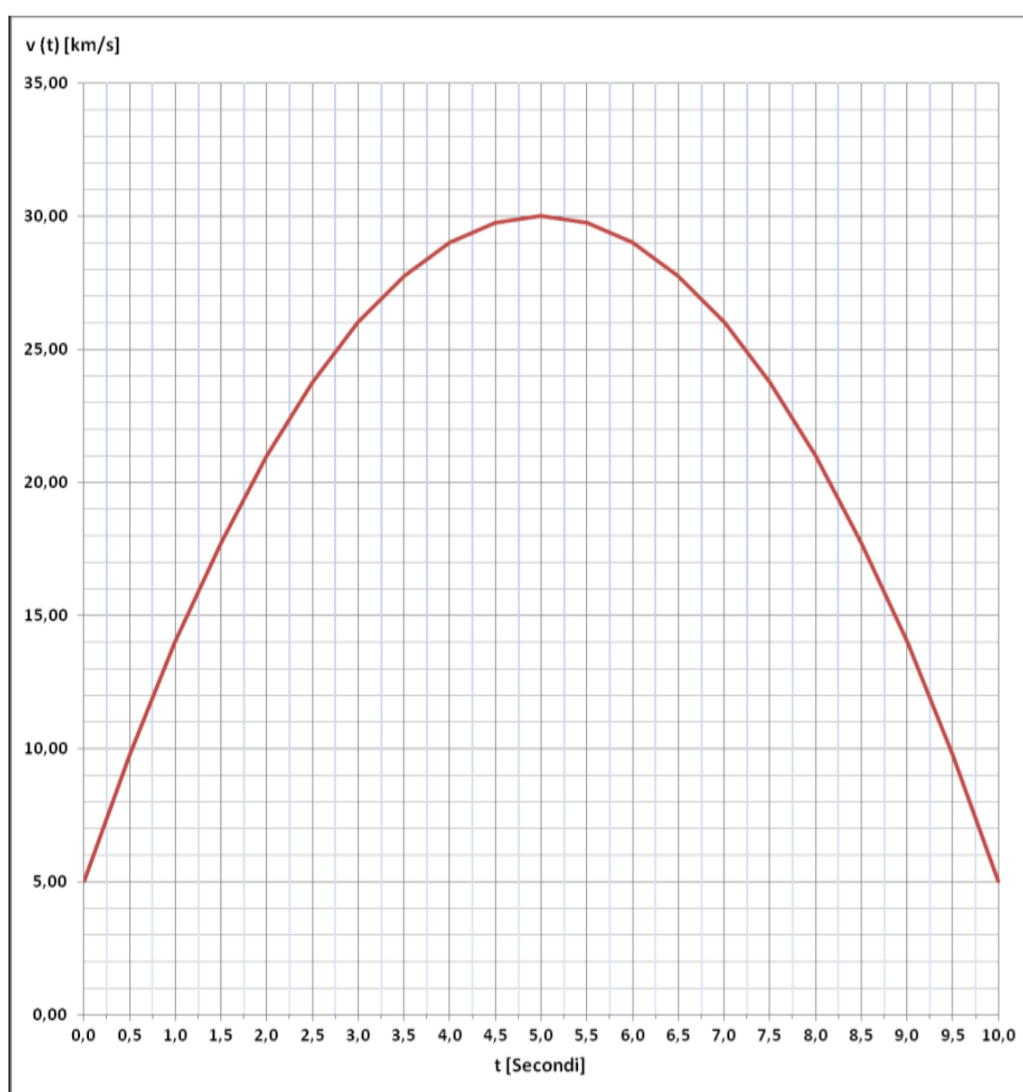
Simulazione ministeriale II prova di Matematica

Liceo Scientifico

Esercizio n. 1

Problema: Una collisione tra meteoriti

Marco e Luca, durante la visita guidata ad un museo scientifico interattivo, osservano su un monitor la simulazione della collisione tra due meteoriti, effettuata da un videogioco. Sul monitor sono rappresentate la traiettoria del primo meteorite e il grafico della sua velocità in funzione del tempo, mostrato in figura.



In base alle loro conoscenze di matematica, discutono sul tipo di curva geometrica rappresentata dal grafico e cercano di determinarne l'equazione, necessaria per procedere nella simulazione.

1. Aiuta Marco e Luca a determinare l'equazione che rappresenta la curva, spiegando il procedimento seguito.

Dopo che Marco e Luca hanno scritto sul terminale l'equazione trovata, il videogioco si complimenta con loro e sul monitor appare la seguente espressione:

$$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t \quad t > 0$$

Viene quindi chiesto loro di verificare se la funzione data rappresenta lo spazio percorso dal meteorite in funzione del tempo (legge oraria del moto).

2. Aiuta Marco e Luca a verificare che la funzione apparsa sul monitor rappresenta la legge oraria del moto, spiegando il procedimento seguito.

A questo punto sul monitor appare un secondo meteorite, la cui traiettoria interseca quella del primo meteorite in un punto P. Il videogioco chiede quale condizione deve essere verificata affinché avvenga l'urto.

3. Aiuta Marco e Luca a rispondere in modo qualitativo.

Marco e Luca rispondono correttamente e il primo meteorite viene colpito dal secondo e devia dalla traiettoria originaria modificando il suo moto. Dopo l'urto il monitor indica che il primo meteorite si muove ora con la nuova legge oraria:

$$s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t$$

Il videogioco chiede quindi di determinare il tempo t_{urto} in cui è avvenuto l'urto. Aiuta Marco e Luca a:

4. determinare il tempo t_{urto}
5. studiare la legge oraria del primo meteorite nell'intervallo tra 0 e $3 \cdot t_{\text{urto}}$ secondi, evidenziando la presenza di eventuali punti di discontinuità e/o di non derivabilità e tracciandone il grafico.

Risoluzione

Punto 1

La curva che rappresenta la velocità in funzione del tempo rappresenta una parabola di equazione:

$$v = at^2 + bt + c$$

occorre, quindi determinare i parametri a , b , c .

Dalla figura si deduce che:

la parabola passa per il punto (0;5) $c=5$.

l'ascissa del vertice della parabola è 5

Condizione	Punto	Equazione
Passaggio per un punto	Punto di passaggio (0;5)	$c=5$
Vertice	Ascissa vertice=5	$b/2a=5$
Passaggio per un punto	Punto di passaggio (5;30)	$30=25a+5b+5$

da cui si deduce, risolvendo il sistema, che l'equazione della parabola è:

$$v(t) = -t^2 + 10t + 5$$

Punto 2

Per verificare che la legge oraria apparsa sul monitor sia la legge oraria del meteorite si può utilizzare la condizione:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

per calcolare l'equazione che descrive la velocità in funzione del tempo e confrontarla con quella ricavata nel punto 1.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -t^2 + 10t + 5$$

La funzione apparsa sul monitor rappresenta la legge oraria del moto.

Punto 3

Affinché avvenga l'urto i due meteoriti devono trovarsi nella stessa posizione allo stesso tempo. (punto P). Devono coincidere cioè sia il vettore che identifica la posizione che il tempo.

Punto 4

Nel punto P il primo meteorite, colpito dal secondo, devia dalla sua traiettoria iniziale per seguire la seconda legge oraria proposta. Quindi, essendo il punto P comune ad entrambe le leggi orarie, per calcolare il tempo a cui avviene l'urto occorre mettere a sistema le due leggi orarie.

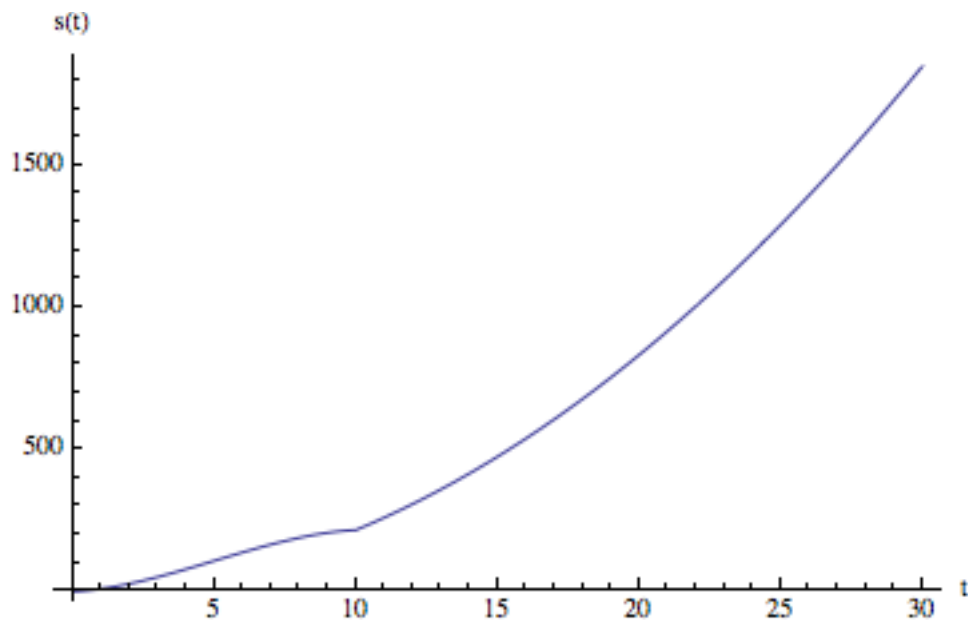
$$\begin{cases} s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t \\ s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t \end{cases}$$

che da come risultati $t=0s$ (non accettabile perché se l'urto avvenisse all'istante iniziale tutta la prima fase del problema non avrebbe senso), e $t=10s$ che rappresenta t_{urto} .

Punto 5

Occorre studiare la funzione:

$$s(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t & 0s \leq t \leq 10s \\ 2t^2 + \frac{5}{3}t & 10s \leq t \leq 30s \end{cases}$$



Le funzioni sono polinomiali quindi non presentano né punti di discontinuità né punti di non derivabilità.

Esercizio n. 2

Problema: un mappamondo prezioso

Lavori in un laboratorio d'arte vetraria e il responsabile del museo civico della tua città ti chiede di progettare un espositore avente forma conica che possa contenere un prezioso e antico mappamondo. Il mappamondo ha raggio R e l'espositore deve essere ermeticamente chiuso, per impedire che il mappamondo prenda polvere.

Il tuo collega Mario dice che, per costruire l'espositore, si potrebbe utilizzare il quarzo ialino ma, data la preziosità del materiale, per risparmiare è necessario determinarne le dimensioni ottimali. Inoltre per proteggere l'espositore dalla polvere decidete di ricoprirlo con una sottile pellicola trasparente di nuova generazione e piuttosto costosa.

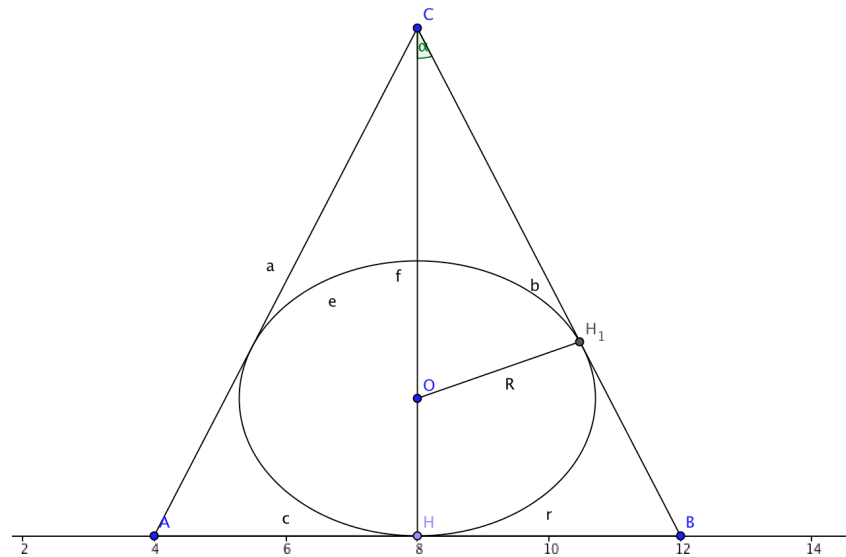
6. Trascurando lo spessore dell'espositore e attraverso un'opportuna modellizzazione geometrica, determina l'altezza h e il raggio di base r dell'espositore affinché sia minima la sua superficie totale, allo scopo di utilizzare una quantità minima di pellicola¹.
7. Fornisci una spiegazione adeguata e convincente del procedimento seguito, eventualmente anche con rappresentazioni grafiche.

Ora tu e Mario dovete scegliere la pellicola da sistemare sulla superficie esterna dell'espositore. La scelta va fatta tra due pellicole che hanno lo stesso costo unitario ma diverse proprietà: la prima ogni anno perde il 3% della resistenza all'usura che ha a inizio anno, mentre la seconda ogni anno perde il 2% della resistenza all'usura iniziale.

8. Aiuta Mario nel capire quale pellicola convenga scegliere in funzione della durata, tenendo conto del fatto che entrambe hanno la stessa resistenza di partenza e che una pellicola va cambiata quando la sua resistenza all'usura risulta inferiore al 30% della sua resistenza di partenza.

Ricorda che la superficie totale S di un cono è data dall'espressione: $S = \pi r^2 + \pi r \left(\sqrt{r^2 + h^2} \right)$

Risoluzione



$$\begin{aligned} OH &= R \\ HB &= r \end{aligned}$$

$$R = OC \sin \alpha \longrightarrow OC = R / \sin \alpha$$

$$CH = OC + OH = R / \sin \alpha + R = R(1 + \sin \alpha) / \sin \alpha$$

$$HB = CH \tan \alpha = R(1 + \sin \alpha) / \sin \alpha \cdot (\sin \alpha / \cos \alpha) = R(1 + \sin \alpha) / (\cos \alpha)$$

$$CB = HB / \sin \alpha = R(1 + \sin \alpha) / (\sin \alpha \cos \alpha)$$

$$S = \pi r^2 + \pi r \left(\sqrt{r^2 + h^2} \right) = \pi \cdot HB^2 + \pi \cdot HB \cdot CB$$

da cui

$$S = \pi \cdot R^2 \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 + \pi \cdot R^2 \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$S = \pi \cdot R^2 \frac{(1 + \sin \alpha)^3}{\cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha} = \pi \cdot R^2 \frac{(1 + \sin \alpha)^3}{(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha) \cdot \sin \alpha}$$

$$S = \pi R^2 \frac{(1 + \sin \alpha)^2}{(1 - \sin \alpha) \sin \alpha}$$

se pongo $x = \sin \alpha$

$$S = \pi R^2 \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}$$

$$\frac{dS}{dx} = \pi R^2 \cdot \frac{2(1+x)x(1-x) - (1+x)^2(1-2x)}{x^2(1-x)^2}$$

$$\frac{dS}{dx} = \pi R^2 \cdot \frac{(3x^2 + 2x - 1)}{x^2(1-x)^2}$$

Studio il segno della derivata ed ottengo un minimo per $x=1/3$ e quindi $\alpha = \arcsen(1/3)=20^\circ$.

Punto 3

I Pellicola

Resistenza i-esimo anno = $\text{Resistenza_anno0} \cdot (1-0.03)^i$

II Pellicola

Resistenza i-esimo anno = $\text{Resistenza_anno0} \cdot (1-0.02^i)$

Calcolo quanti anni servono con la seconda pellicola finché si abbia un decadimento della resistenza tale da dover essere sostituita (resistenza inferiore al 30% di quella iniziale)

$$\text{Resistenza i-esimo anno} / \text{Resistenza_anno0} = 1 - 0.02^i = 0.30$$

da cui calcolando i

$$i = 0.7 / 0.02 = 35 \text{ anni}$$

calcolo dopo 35 la resistenza della prima pellicola e le confronto:

$$i = 35 \text{ anni} \quad \text{Resistenza 35esimo anno} / \text{Resistenza_anno0} = (1-0.03)^{35} = 0.34$$

Quindi dopo 35 anni la prima pellicola ha una resistenza maggiore della seconda 34% contro il 30%.