Correzione della simulazione di seconda prova di matematica del 25 febbraio 2015

PROBLEMA 1: Una collisione tra meteoriti

1] La curva geometrica rappresentata dal grafico nel piano *t-v* è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse v la cui equazione è del tipo $v(t) = at^2 + bt + c$ oppure, note le coordinate del vertice (t_V,v_V), del tipo $v - v_V = a\left(t - t_V\right)^2$ (con a<0 poichè è convessa ovvero ha la concavità volta verso il basso).
La sua equazione si determina sostituendo le coordinate del vertice V(5,30)
$v - 30 = a \cdot (t-5)^2$

$$v - 30 = a\ (t-5)^2 \tag{1}$$

e imponendo il passaggio per il punto A(0,5).
$\left(5 - 30 = a \cdot (0-5)^2, a\right)$ si ottiene

$$-1 \tag{2}$$

Quindi l'equazione della velocità in funzione del tempo (con $t \geq 0$) del primo meteorite rappresentata nel grafico è:
$v - 30 = -1 \cdot (t-5)^2$

$$v - 30 = -(t-5)^2 \tag{3}$$

$$v - 30 = -t^2 + 10\,t - 25 \tag{4}$$

$$v = -t^2 + 10\,t + 5 \tag{5}$$

2] La funzione $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t$ che apppare sul monitor rappresenta la legge oraria del moto del primo meteorite se la sua funzione derivata prima coincide con la funzione v(t) ricavata al punto **1**.
$s'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(-\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t\right)$

$$\mathrm{D}(s)(t) = -t^2 + 10\,t + 5 \tag{6}$$

Poichè l'espressione della funzione **(5)** coincide con la **(6)**, si è verificato che $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t$ che apppare sul monitor rappresenta la legge oraria del moto del primo meteorite.

3] Supposto che le traiettorie siano complanari in un piano x-y e abbiano equazione f(x,y)=0 e g(x,y)=0, l'urto avviene se nello stesso istante i due meteoriti si trovano nello stesso punto di coordinate U(x_U,y_U) in cui le curve delle traiettorie s'intersecano ovvero se l'equazione f(x_U,y_U)=g(x_U,y_U) è identicamente soddisfatta.

4] La legge oraria del primo meteorite cambia nell'istante corrispondente al punto d'intersezione delle due leggi orarie (altrimenti si verificherebbe un salto temporale)
$-\frac{1}{3} \cdot t^3 + 5 \cdot t^2 + 5 \cdot t = 2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t$ ottenendo le soluzioni

$$0,\ 10,\ -1 \tag{7}$$

Solo l'istante t=10 s è accettabile, sono da scartare tempi negativi e l'istante iniziale t=0 s in cui il primo meteorite parte.

5] La legge oraria del primo meteorite nell'intervallo tra 0 e t_{urto} ovvero tra 0 s e 30 s è una funzione definita a tratti:

$$h(t) := \begin{cases} -\frac{1}{3}\cdot t^3 + 5\cdot t^2 + 5\cdot t & 0 \le t \le 10 \\ 2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t & 10 < t \le 30 \end{cases} :$$

h(t) è una funzione continua in t=10 infatti:

$$\lim_{t \to 10^-} \left(-\frac{1}{3}\cdot t^3 + 5\cdot t^2 + 5\cdot t\right) = \lim_{t \to 10^+} \left(2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t\right)$$

$$\frac{650}{3} = \frac{650}{3} \qquad \textbf{(8)}$$

La funzione passa per il punto I(10,650/3) ≈ (10,200)

Per rappresentare h(t) studio prima la funzione $s1(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$ in [0,10] e poi considero la funzione $s2(t) = 2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t$ in]10,30].

$0 = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$ ottenendo le soluzioni

$$0,\ \frac{15}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{285},\ \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{285} \qquad \textbf{(9)}$$

in [0,10] la funzione si annulla solo in t=0

$-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t > 0$

in]0,10] la funzione è positiva.

La sua derivata prima ha equazione $s' = -t^2 + 10t + 5$ in [0,10]

$0 = -t^2 + 10t + 5$ ottenendo

$$5 + \sqrt{30},\ 5 - \sqrt{30} \qquad \textbf{(10)}$$

in [0,10] s' non si annulla.

$-t^2 + 10t + 5 > 0$ ottenendo

$$\{t < 5 + \sqrt{30},\ 5 - \sqrt{30} < t\} \qquad \textbf{(11)}$$

in [0,10] s' è sempre positiva quindi la funzione è sempre crescente.

La sua derivata seconda ha equazione $s'' = -2\cdot t + 10$ in [0,10]

$0 = -2\cdot t + 10$

$$5 \qquad \textbf{(12)}$$

in [0,10] si annulla per t=5.

$-2\cdot t + 10 > 0$ *ottenendo*

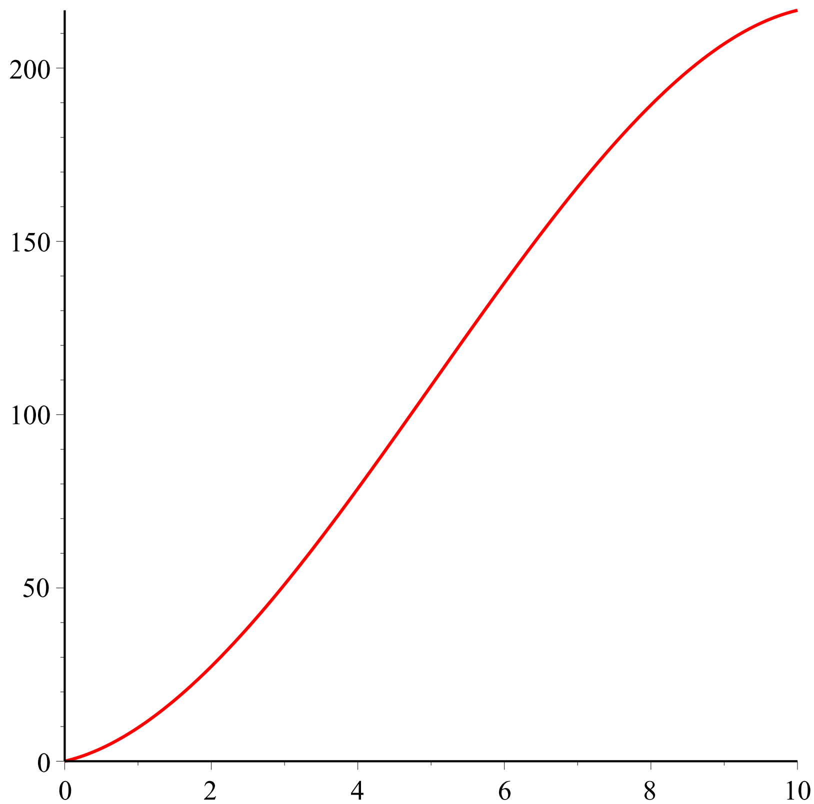
$$\{t < 5\} \tag{13}$$

in [0,5[s'' è positiva quindi la funzione volge la concavità verso l'alto, in]5,10] s'' è negativa quindi la funzione volge la concavità verso il basso in t=5 c'è un punto di flesso la cui ordinata è

$sF = \left(t = 5, -\frac{1}{3} \cdot t^3 + 5 \cdot t^2 + 5 \cdot t\right)$

$$sF = \frac{325}{3} \tag{14}$$

Disegnamola

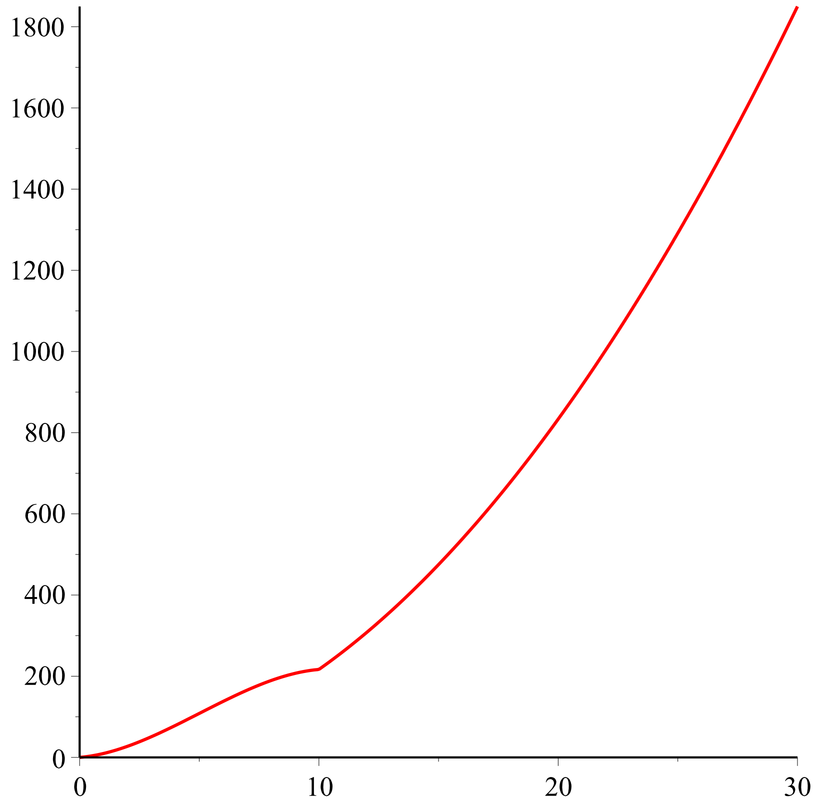


Per la funzione $s2(t) = 2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t$ in]10,30] non è necessario eseguire uno studio di funzione poichè si tratta di un arco di parabola (con asse parallelo all'asse s) con concavità verso l'alto passante per il punto I sopra determinato e G (30,1850).

$s = \left(t = 30, 2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t\right)$

$$s = 1850 \tag{15}$$

La legge oraria del primo meteorite ha quindi grafico:



Si osserva in particolare che la suddetta funzione è continua in [0,30], come già verificato sopra.
La derivata prima di h(t) è:

$$h'(t) = \begin{cases} -t^2 + 10\,t + 5 & 0 \le t < 10 \\ 4 \cdot t + \dfrac{5}{3} & 10 < \mathrm{t} \le 30 \end{cases}$$

In t=10 vi è un punto di non derivabilità (punto angoloso) poichè le derivate destra e sinistra sono diverse e finite.

$$\lim_{t \to 10^-} \left(-t^2 + 10 \cdot t + 5 \right)$$

$$5 \tag{16}$$

$$\lim_{t \to 10^+} \left(4 \cdot t + \frac{5}{3} \right)$$

$$\frac{125}{3} \tag{17}$$

altrove la funzione è derivabile.