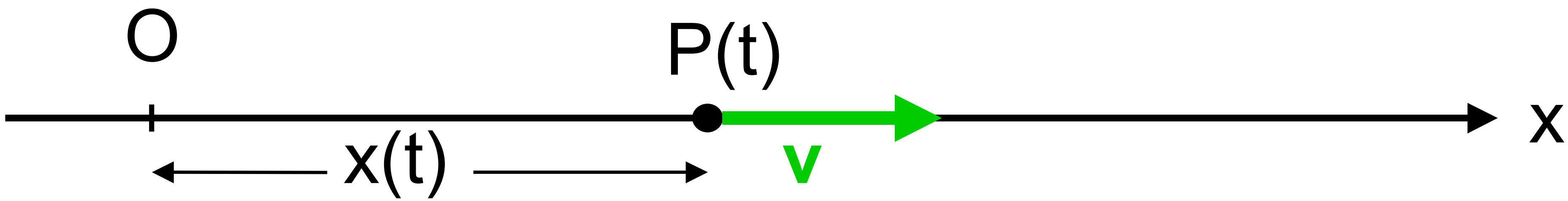
# LEGGI ORARIE DI ALCUNI MOTI PARTICOLARI

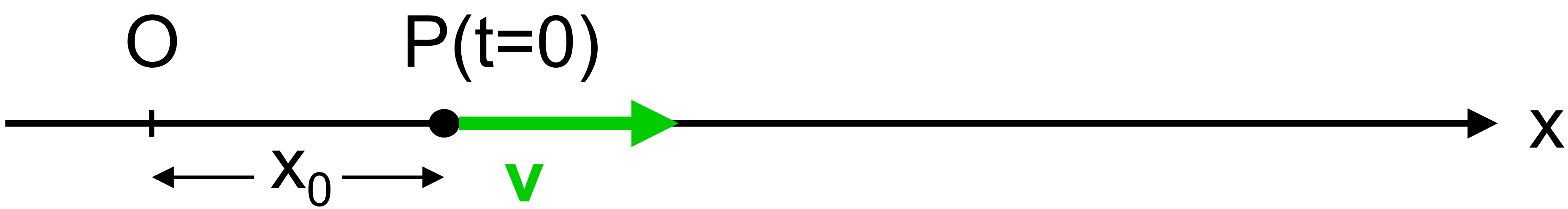
# MOTO RETTILINEO UNIFORME (1)

$v$ = costante; $a = 0$




Legge oraria: $\boxed{x(t) = v\,t + x_0}$

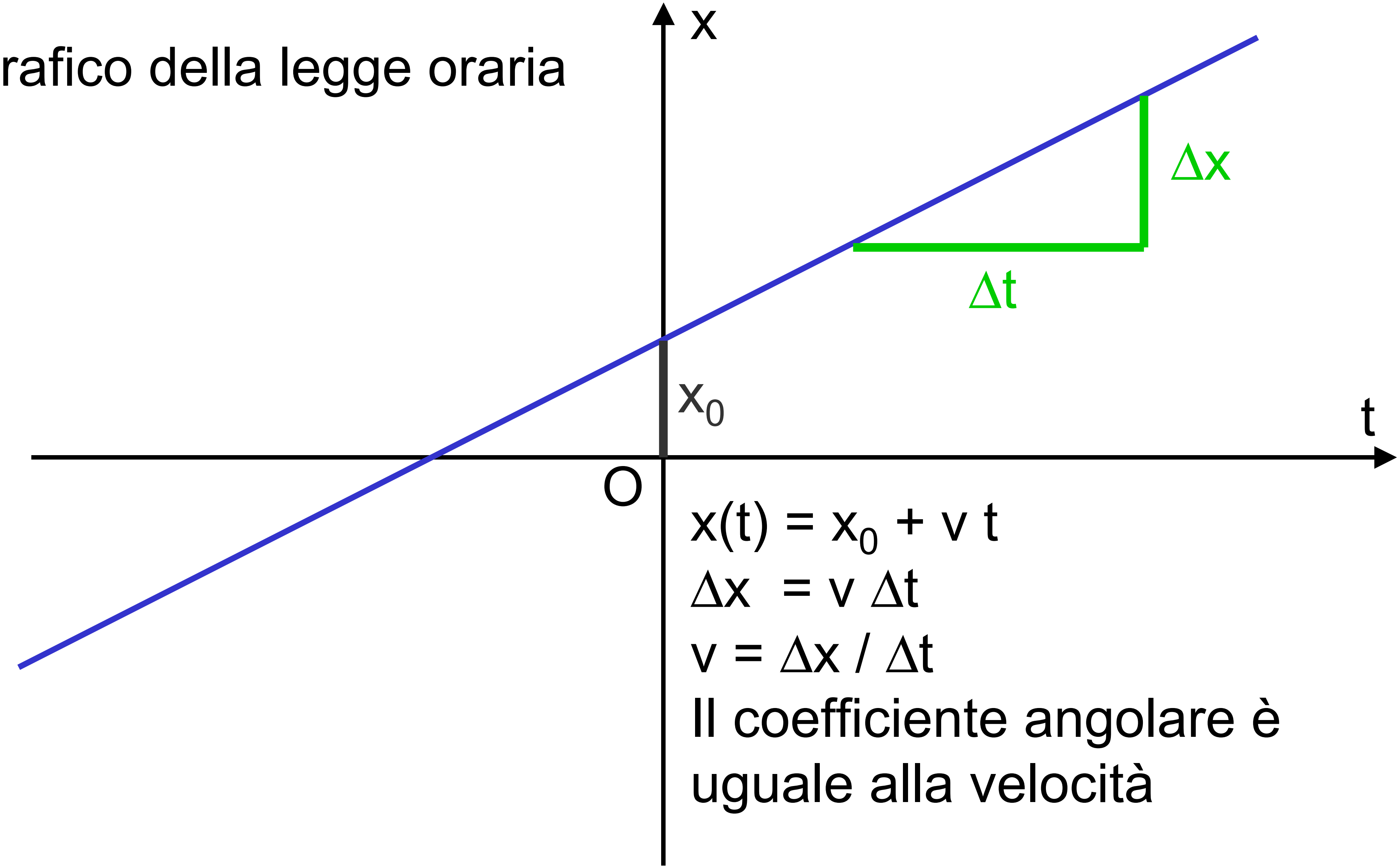
$x_0$ è la posizione di P all'istante $t=0$ (posizione iniziale)




Nel moto rettilineo uniforme la velocità media
è uguale alla velocità istantanea

# MOTO RETTILINEO UNIFORME (2)

grafico della legge oraria




$x(t) = x_0 + v\,t$

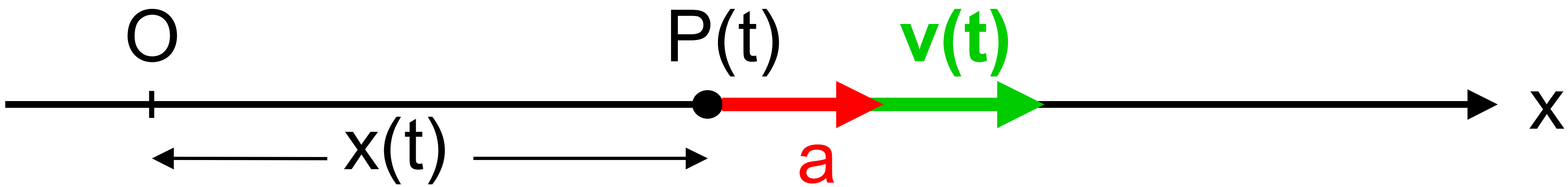
$\Delta x = v\,\Delta t$

$v = \Delta x / \Delta t$

Il coefficiente angolare è uguale alla velocità

# MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO (1)

a = costante;     v parallela ad a;



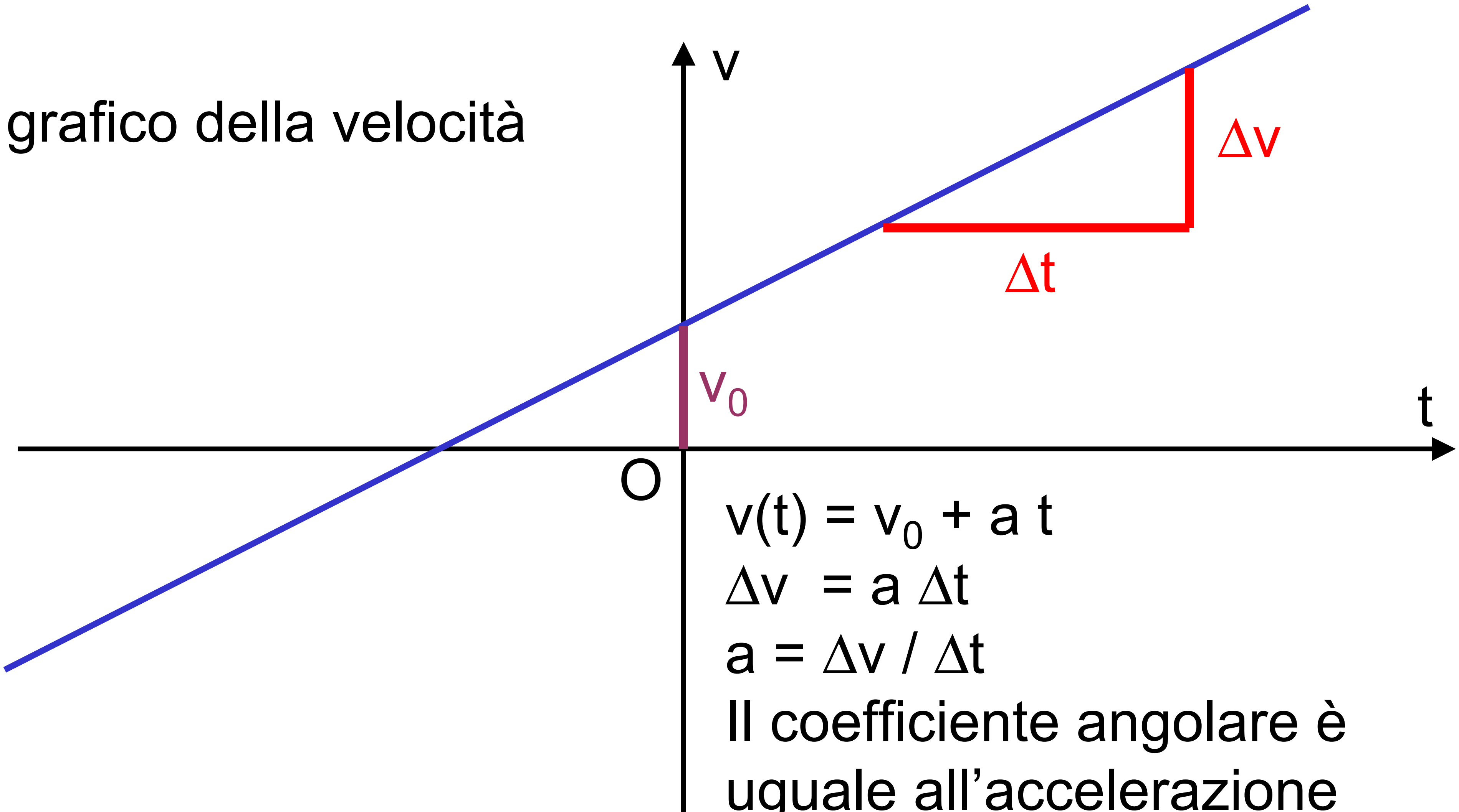

Legge oraria: $\boxed{x(t) = (1/2)\, a\, t^2 + v_0\, t + x_0}$

velocità: $\boxed{v(t) = a\, t + v_0}$

$x_0$ e $v_0$ sono rispettivamente la posizione e la velocità iniziali di P (cioè all'istante t=0)

# MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO (2)

grafico della velocità




$v(t) = v_0 + a\,t$

$\Delta v = a\,\Delta t$

$a = \Delta v / \Delta t$

Il coefficiente angolare è uguale all'accelerazione

# MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO (3)

In generale vale la formula:

$x(t) = v_{media}\, t + x_0$

Inoltre, poiché v aumenta linearmente nel tempo:

$v_{media} = (v_0 + v(t)\,)\ /\ 2$

che utilizzando la legge oraria della velocità diventa:

$v_{media} = (1/2)\, a\, t + v_0$

Sostituendo la precedente nella prima si ottiene:

$x(t) = (\ (1/2)\, a\, t + v_0\ )\, t + x_0$

ovvero: $x(t) = (1/2)\, a\, t^2 + v_0\, t + x_0$

# MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO (4)

Eliminiamo il tempo tra le seguenti due formule:

$v(t) = a\, t + v_0$

$x(t) = (1/2)\, a\, t^2 + v_0\, t + x_0$

$t = [v(t) - v_0] /a$

$x(t) - x_0 = (1/2)a([v(t) - v_0]/a)^2 + v_0([v(t) - v_0] /a)$

$x(t) - x_0 = (1/a)[v(t)^2 + v_0^2 - 2v(t)v_0]/2 + v(t)v_0 - v_0^2$

$x(t) - x_0 = (1/2a)\, [v(t)^2 - v_0^2]$

$v(t)^2 - v_0^2 = 2a[x(t) - x_0]$

Se $v_0 = 0$, allora:

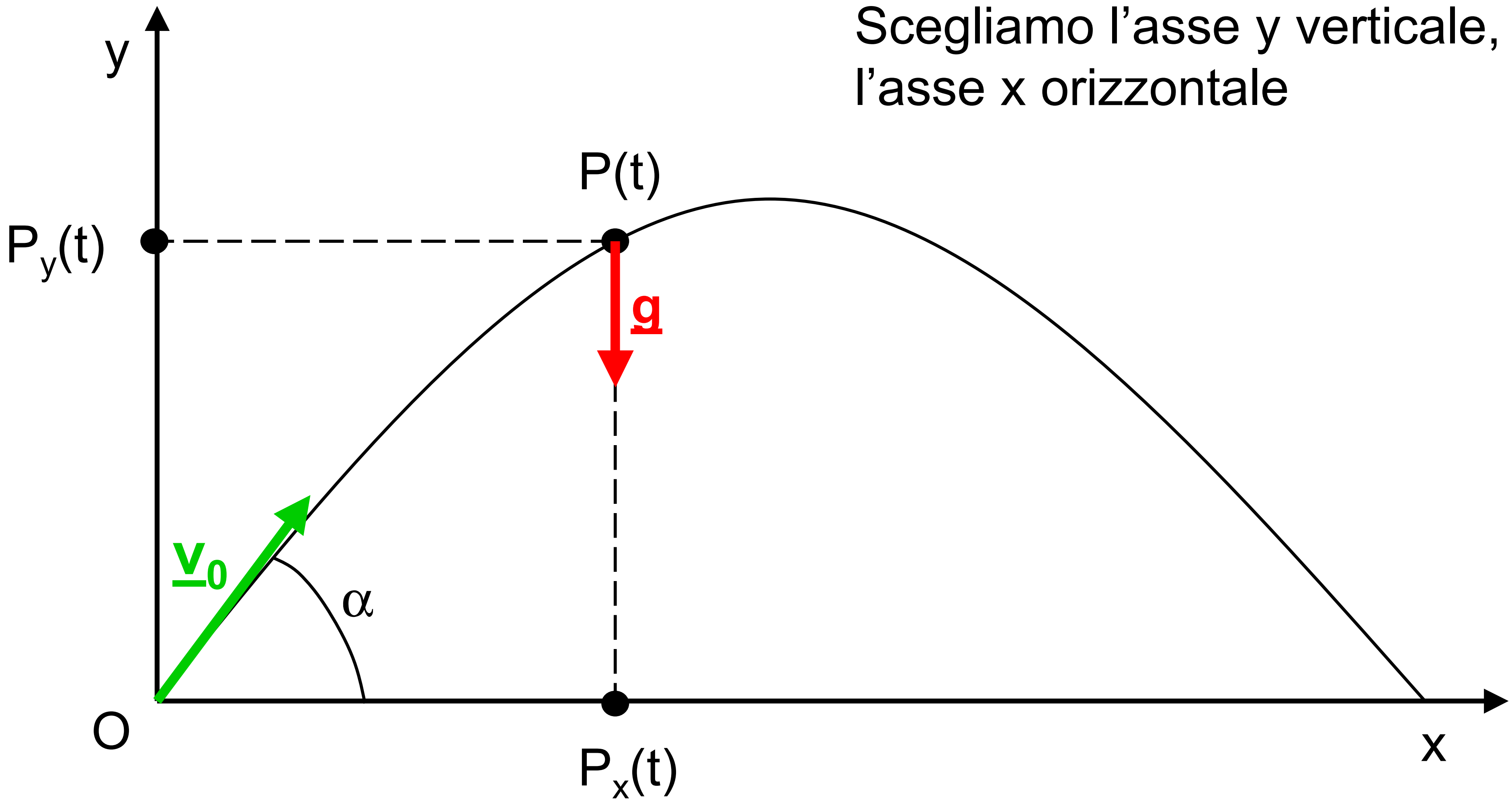
$v(t) = \sqrt{}(2a[x(t) - x_0])$

# MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO IN DUE DIMENSIONI (2)

- Esempio: lancio di un proiettile. L’accelerazione di gravità $\underline{\mathbf{g}}$ è diretta lungo la verticale e verso il basso
- $g = 9{,}81\ m/s^2$
- $\underline{\mathbf{g}}$ è costante in direzione, verso e modulo (è un vettore costante)
- Il proiettile viene lanciato con una velocità iniziale $\underline{\mathbf{v}}_0$ che forma un angolo $\alpha$ con il suolo

# MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO IN DUE DIMENSIONI (3)

Scegliamo l'asse y verticale, e l'asse x orizzontale



# MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO IN DUE DIMENSIONI (4)

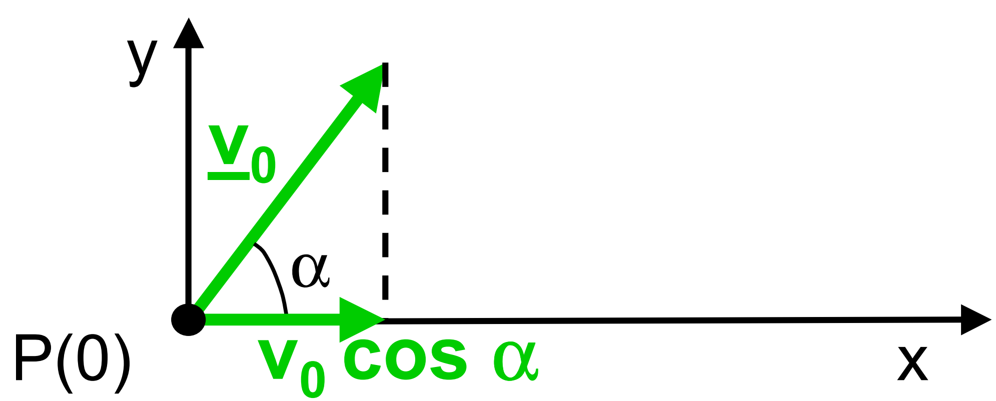
- In un moto bidimensionale (o tridimensionale) possiamo studiare il moto delle proiezioni del punto P sugli assi del sistema di coordinate cartesiane
- Il punto $P_x$ è la proiezione del punto P sull'asse x. La sua velocità e la sua accelerazione sono rispettivamente le componenti, lungo l'asse x, dei vettori velocità e accelerazione di P
- Per $P_y$ valgono delle considerazioni analoghe
- L'insieme delle leggi orarie di $P_x$ e $P_y$ costituiscono la legge oraria di P: $P_x \leftrightarrow x(t)$; $P_y \leftrightarrow y(t)$; $P \leftrightarrow (x(t),y(t))$

# MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO IN DUE DIMENSIONI (5)

- Com'è il moto di $P_x$?
- La sua accelerazione è data dalla componente di $\underline{\mathbf{g}}$ lungo l'asse x
- Poiché $\underline{\mathbf{g}}$ è ortogonale all'asse x, tale componente è nulla
- Quindi l'accelerazione di $P_x$ è uguale a zero; il moto di $P_x$ è rettilineo uniforme
- La legge oraria generale del moto rettilineo uniforme è: $x(t) = v\,t + x_0$

# MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO IN DUE DIMENSIONI (6)

- Per trovare la legge oraria particolare di questo moto rettilineo uniforme dobbiamo tenere conto delle condizioni iniziali
- Se l'istante in cui il punto P si trova nell'origine O del sistema di assi cartesiani, è t = 0, allora $x_0 = 0$
- La velocità è costante e uguale alla velocità iniziale del punto $P_x$, che a sua volta è uguale alla componente x della velocità iniziale di P:



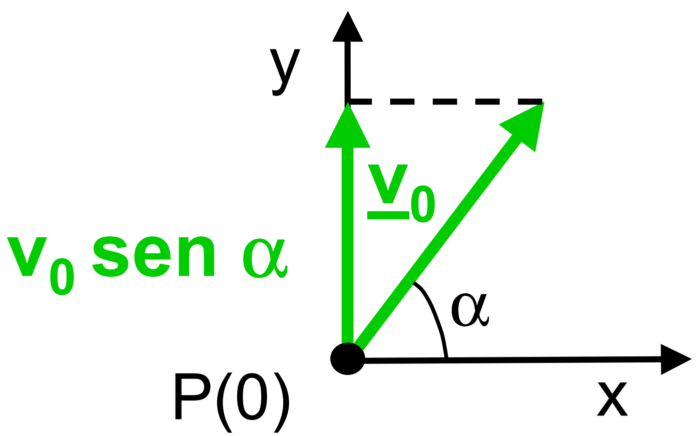

- La legge oraria di $P_x$ è quindi:
$x(t) = (v_0 \cos \alpha)\, t$

# MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO IN DUE DIMENSIONI (7)

- Com'è il moto di $P_y$?
- La sua accelerazione è data dalla componente di g lungo l'asse y
- Il vettore **g** è parallelo all'asse y, ma di verso opposto, quindi tale componente è $a_y = - g$
- Quindi l'accelerazione di $P_y$ è costante; il moto di $P_y$ è rettilineo uniformemente accelerato
- La legge oraria generale del moto rettilineo uniformemente accelerato è:
  $y(t) = (1/2)\, a_y\, t^2 + v_{0y}\, t + y_0$

# MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO IN DUE DIMENSIONI (8)

- Come prima, per trovare la legge oraria particolare di <u>questo</u> moto rettilineo uniformemente accelerato dobbiamo tenere conto delle <u>condizioni iniziali</u>
- Se l'istante in cui il punto P si trova nell'origine O del sistema di assi cartesiani, è t = 0, allora $y_0 = 0$
- La velocità iniziale del punto $P_y$, è uguale alla componente y della velocità iniziale di P:



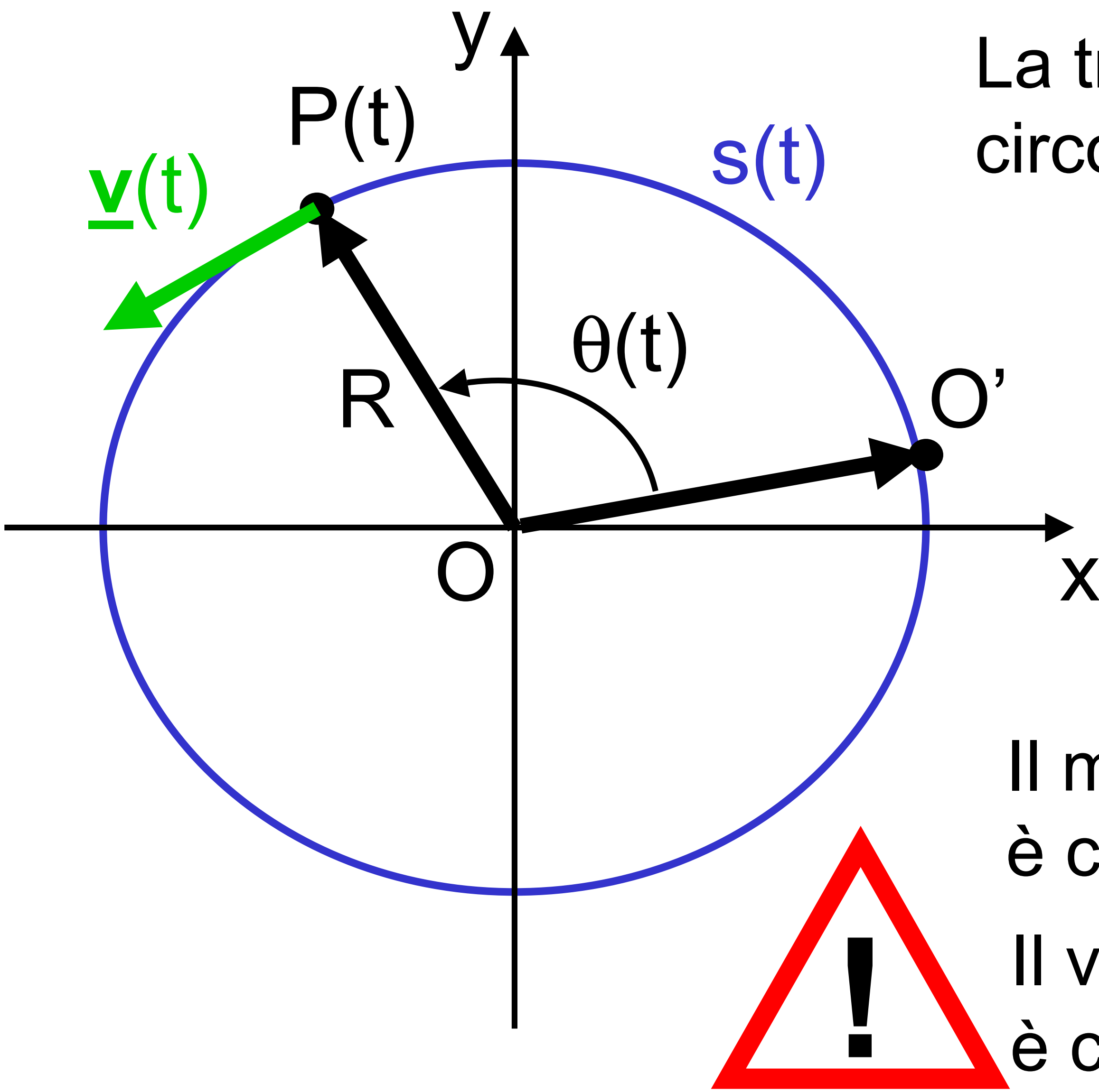

- La legge oraria di $P_y$ è quindi:

$$y(t) = -(1/2)\, g\, t^2 + (v_0 \sin \alpha)\, t$$

# MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO IN DUE DIMENSIONI (9)

- Riassumendo, le legge oraria di P è data dalle due funzioni del tempo:
  $x(t) = (v_0 \cos \alpha)\, t$
  $y(t) = -\ (1/2)\, g\, t^2 + (v_0 \sin \alpha)\, t$
- Dalla prima uguaglianza possiamo ottenere t in funzione di x:
  $t = x / v_0 \cos \alpha$
  e, sostituendo nella seconda esprimiamo y in funzione di x:
  $y(x) = -\ [g/(v_0 \cos \alpha)^2]\, x^2 + (\mathrm{tg}\, \alpha)\, x$
  questa funzione rappresenta la <u>traiettoria</u> del punto P

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (1)




La traiettoria è una circonferenza di raggio R

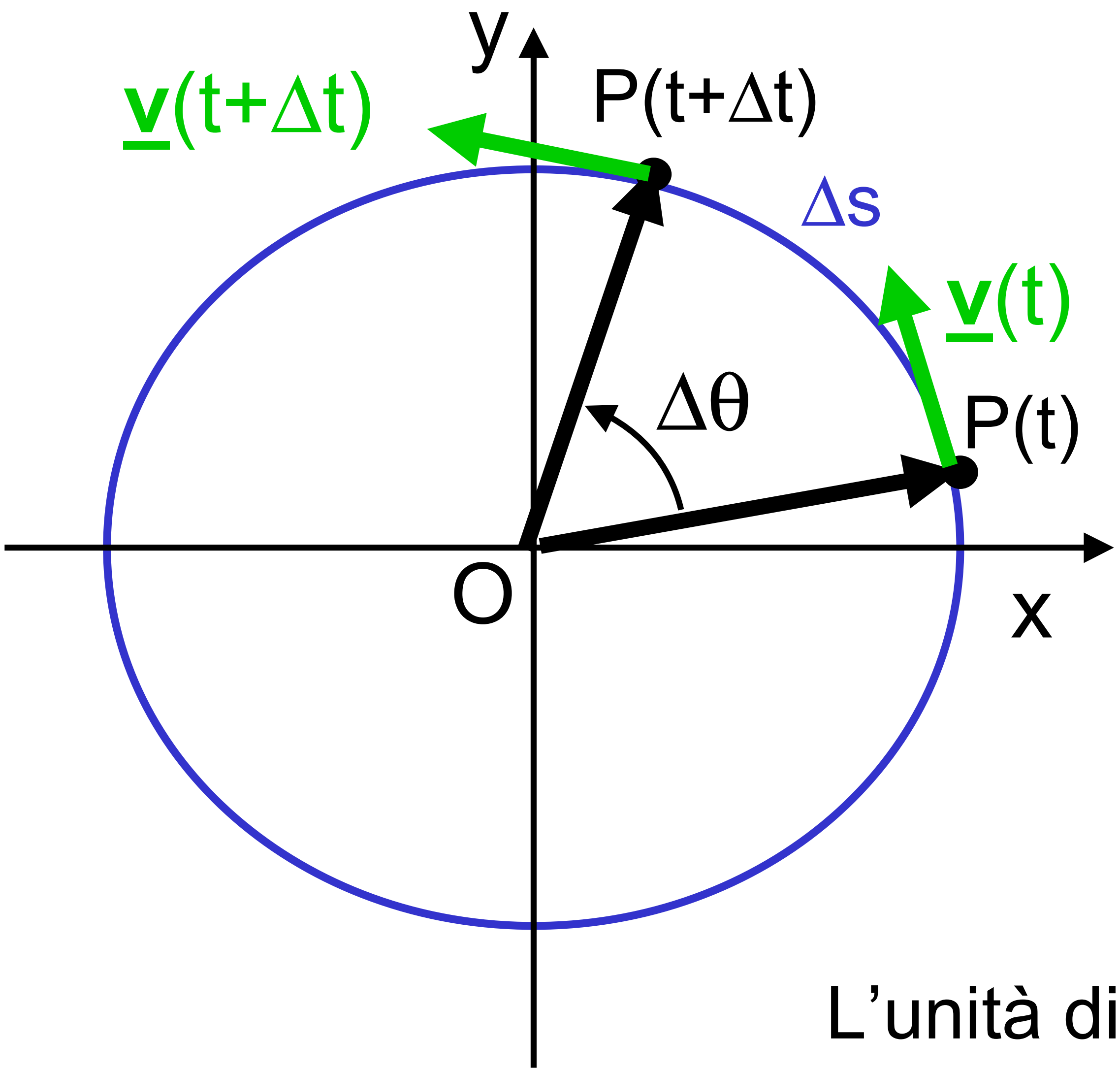
L'<u>ascissa curvilinea</u> s(t) è la lunghezza dell'arco O'P(t)

$$\boxed{s(t) = R\,\theta(t)}$$

Il modulo v della velocità è costante

Il vettore velocità <u>**v**</u> <u>non</u> è costante

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (2)




La <u>velocità angolare</u> è Il rapporto tra l'angolo $\Delta\theta$ spazzato dal vettore **<u>OP</u>** nell'intervallo di tempo $\Delta t$, e l'intervallo di tempo $\Delta t$ stesso

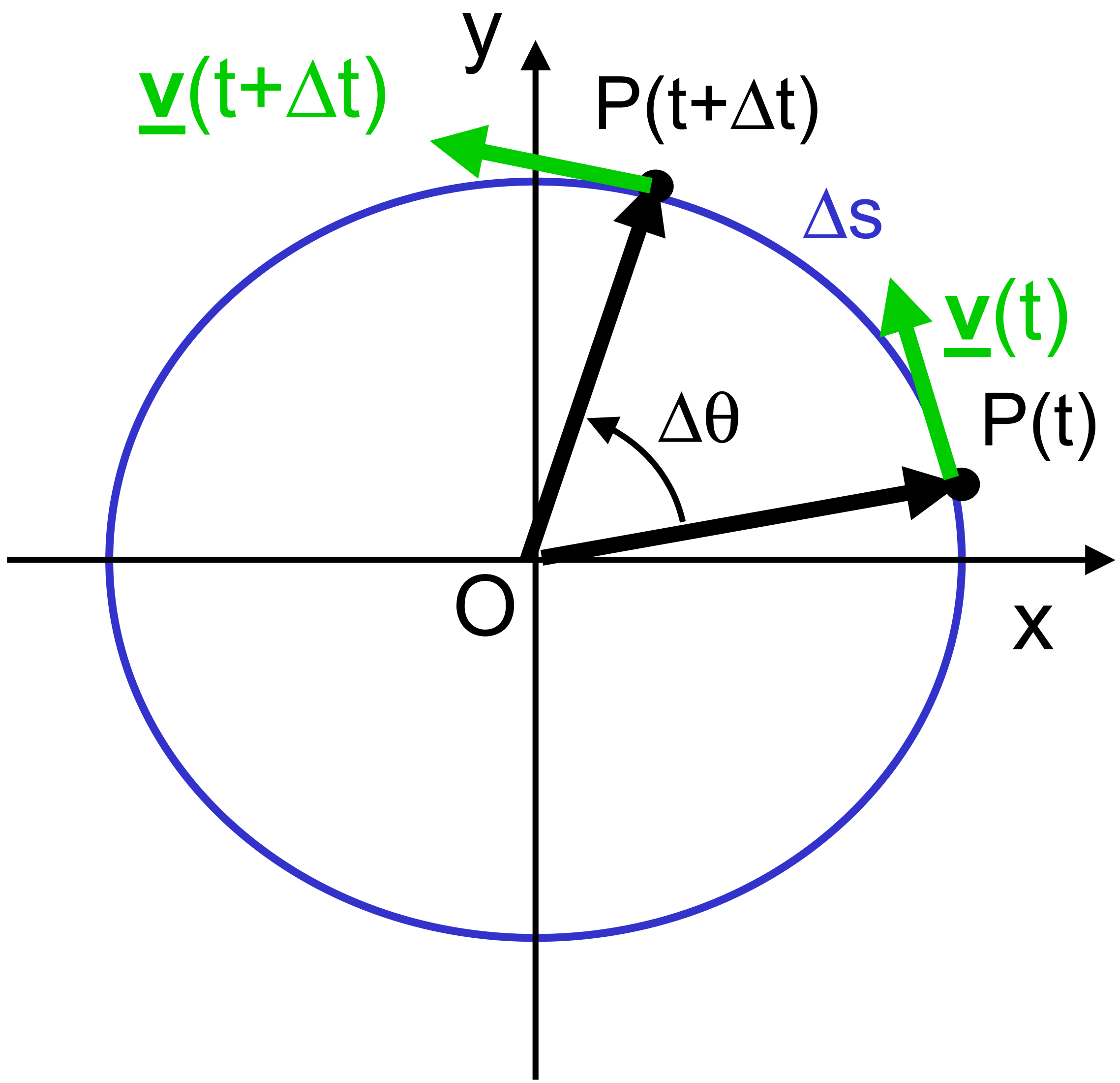
$$\boxed{\omega = \Delta\theta / \Delta t}$$

L'unità di misura della velocità angolare nel SI è rad/s

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (3)

- Notiamo che $\omega = \Delta\theta / \Delta t$ è la velocità angolare media nell'intervallo di tempo $\Delta t$
- La velocità istantanea si ottiene per $\Delta t \rightarrow 0$
- Nel caso del moto circolare uniforme, la velocità angolare è costante, quindi la velocità angolare media coincide con la velocità angolare istantanea

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (4)




$\Delta s$ = arco $P(t)P(t+\Delta t)$
quindi,
$\Delta s = R\Delta\theta$
Ma $\Delta s$ è la distanza percorsa nel tempo $\Delta t$, quindi
$\Delta s = v\Delta t$
Ricaviamo che:
$\omega = \Delta\theta / \Delta t = v / R$

$$\boxed{v = R\,\omega}$$

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (5)

- Il moto circolare uniforme è un moto <u>periodico</u>. Ciò significa che il moto, dopo un certo intervallo di tempo chiamato <u>periodo</u>, si ripete uguale a se stesso
- Il periodo del moto circolare uniforme è il tempo necessario affinché il punto compia un giro completo:

$$T = 2\pi R / v = 2\pi / \omega$$

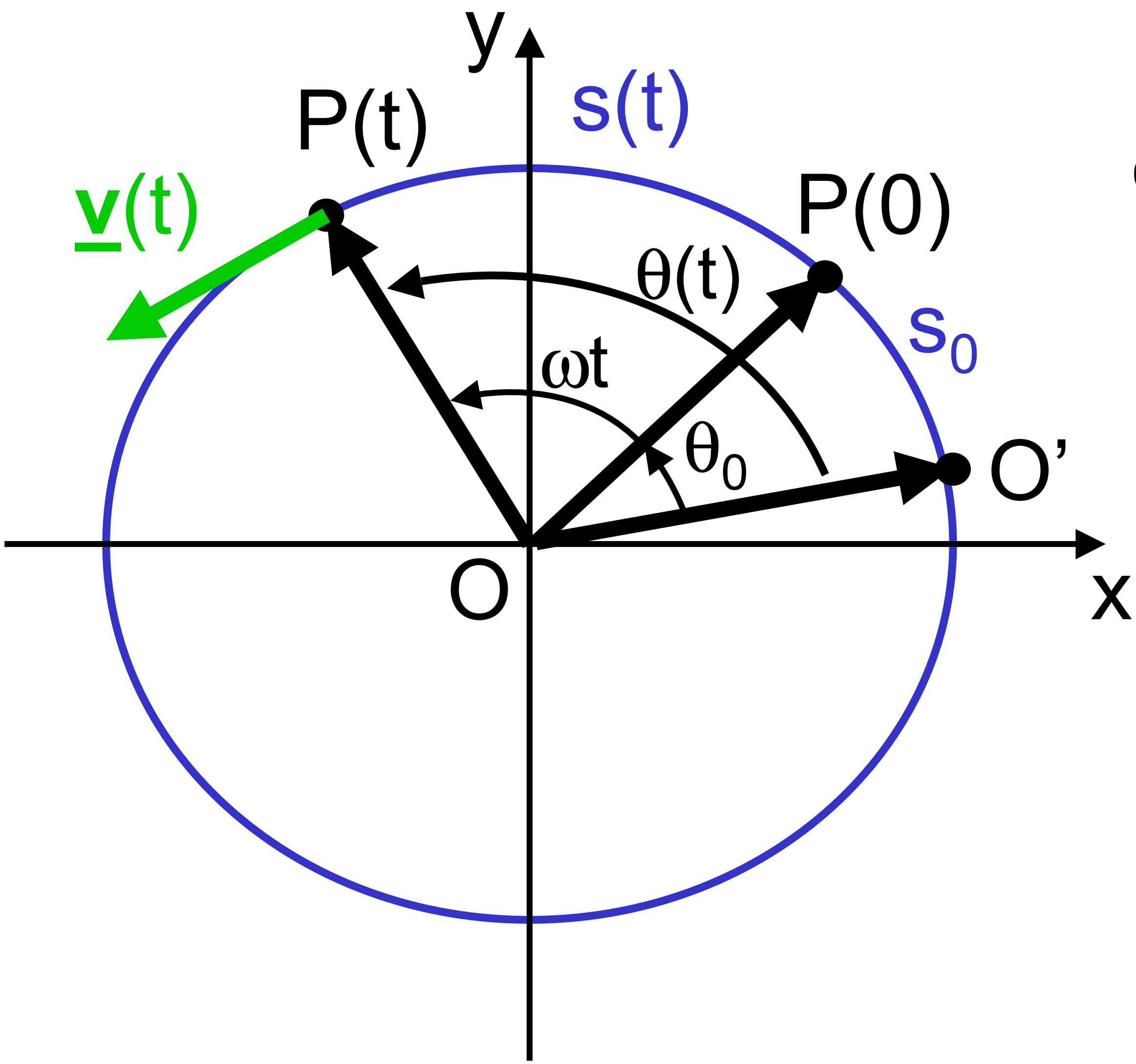
- La <u>frequenza</u> è l'inverso del periodo:

$$f = 1 / T = \omega / 2\pi$$

$$\omega = 2\pi f$$

  la frequenza del moto circolare uniforme è uguale al numero di giri al secondo
- L'unità di misura SI della frequenza è l'hertz (Hz)

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (6)

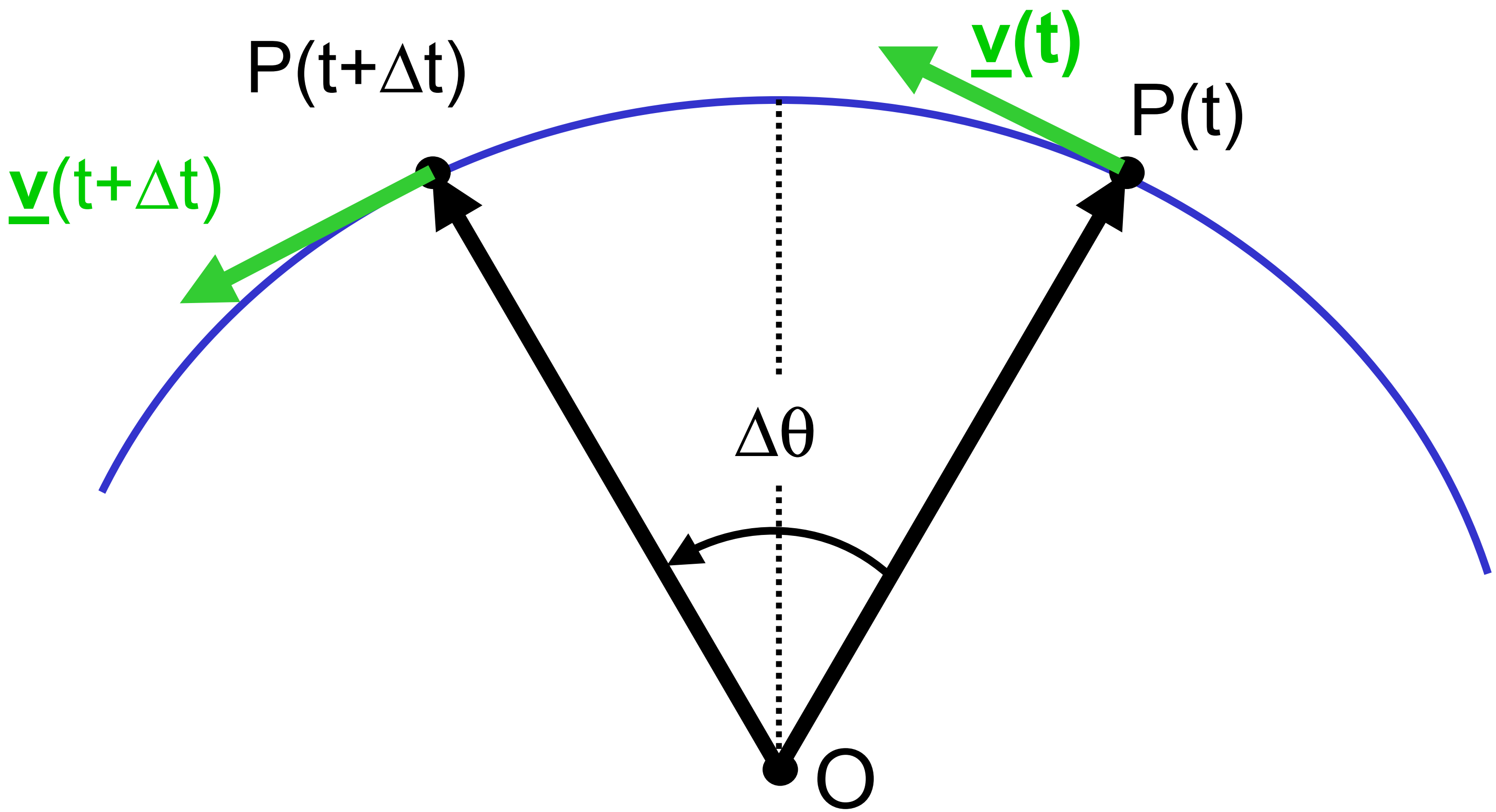



Legge oraria del moto circolare uniforme

$$s(t) = s_0 + vt$$
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

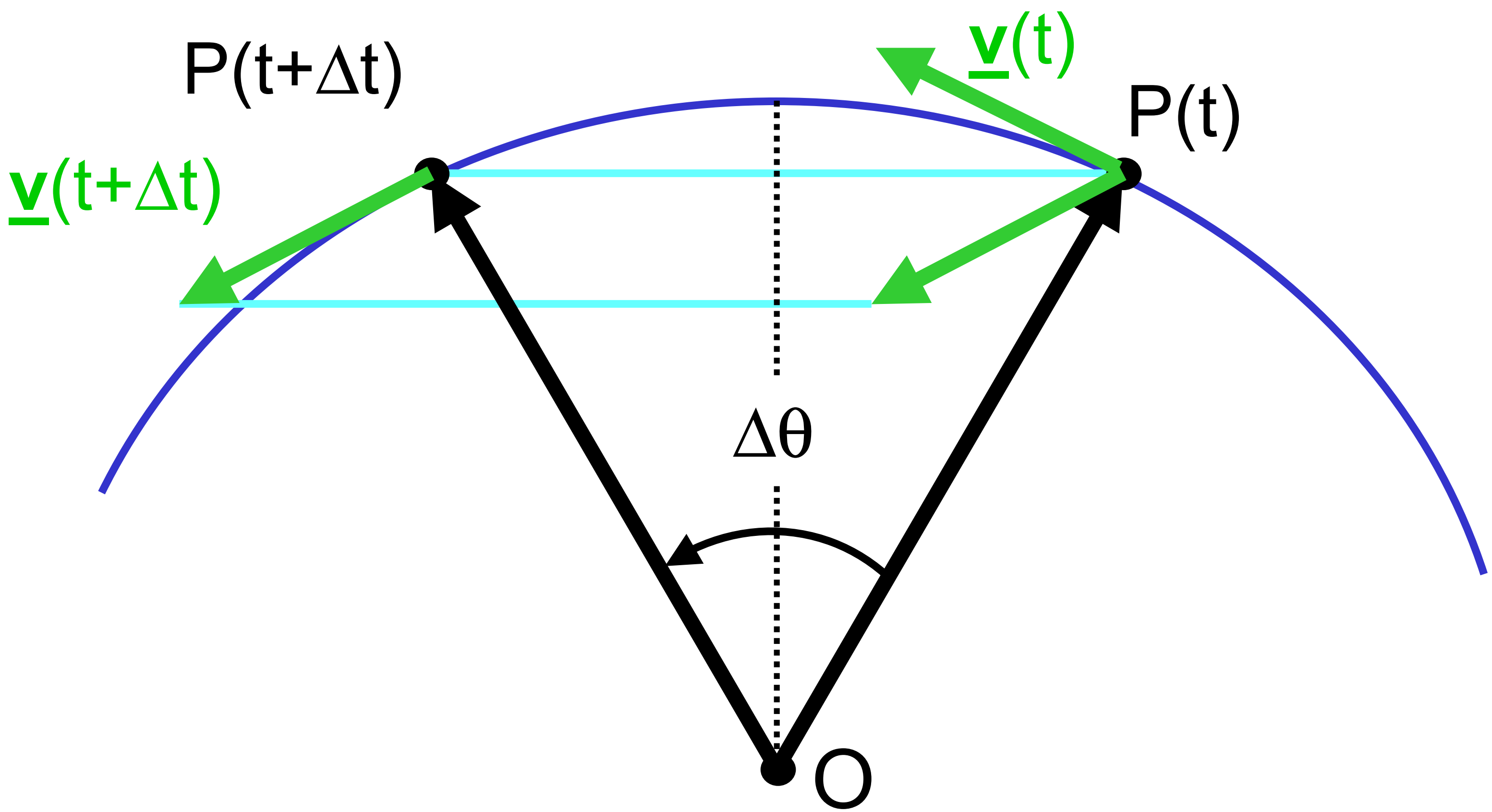
# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (7)

Accelerazione nel moto circolare uniforme



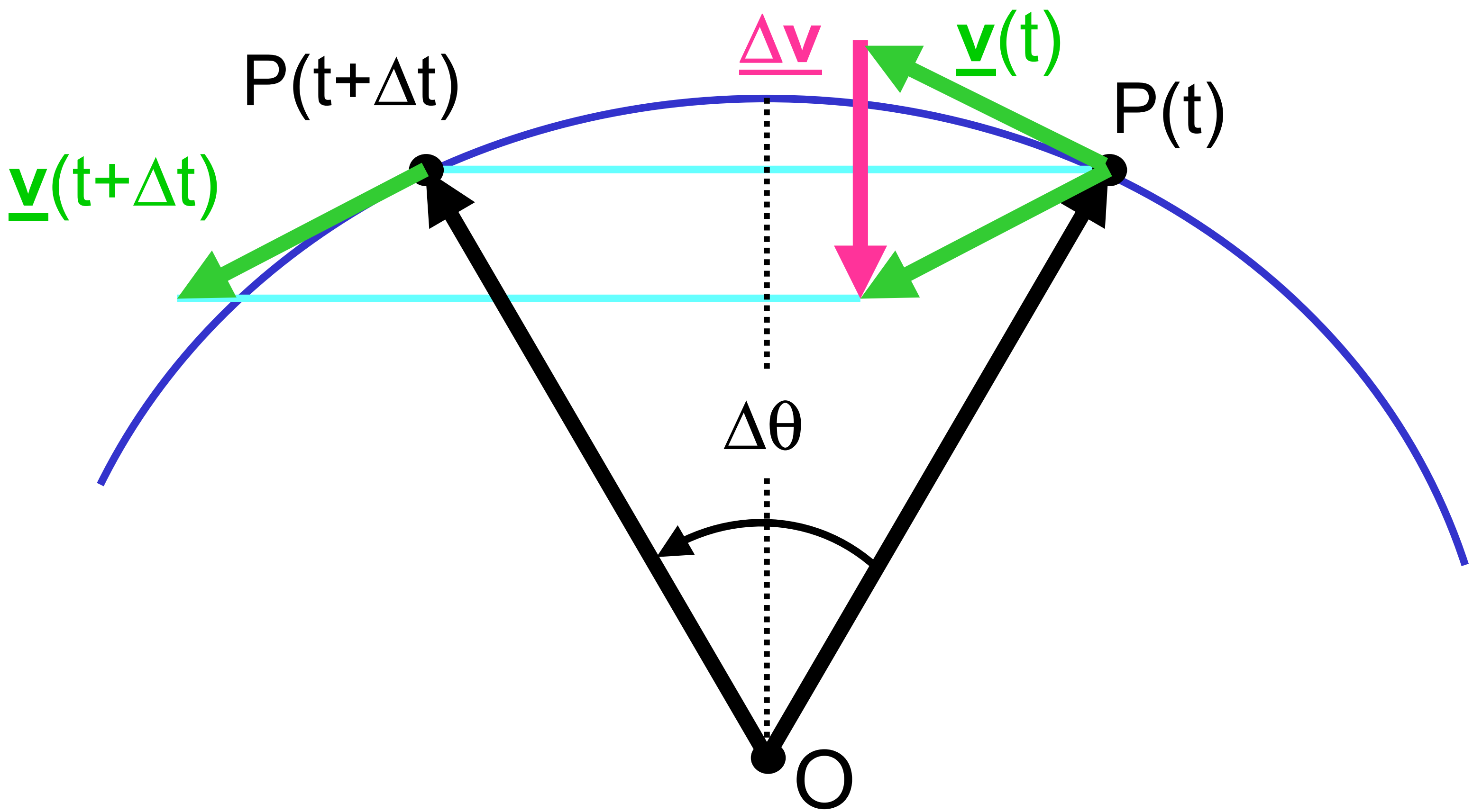
# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (8)

Per costruire il vettore $\underline{\mathbf{v}}(t+\Delta t) - \underline{\mathbf{v}}(t)$ effettuo prima il trasporto parallelo di $\underline{\mathbf{v}}(t+\Delta t)$ su $\underline{\mathbf{v}}(t)$

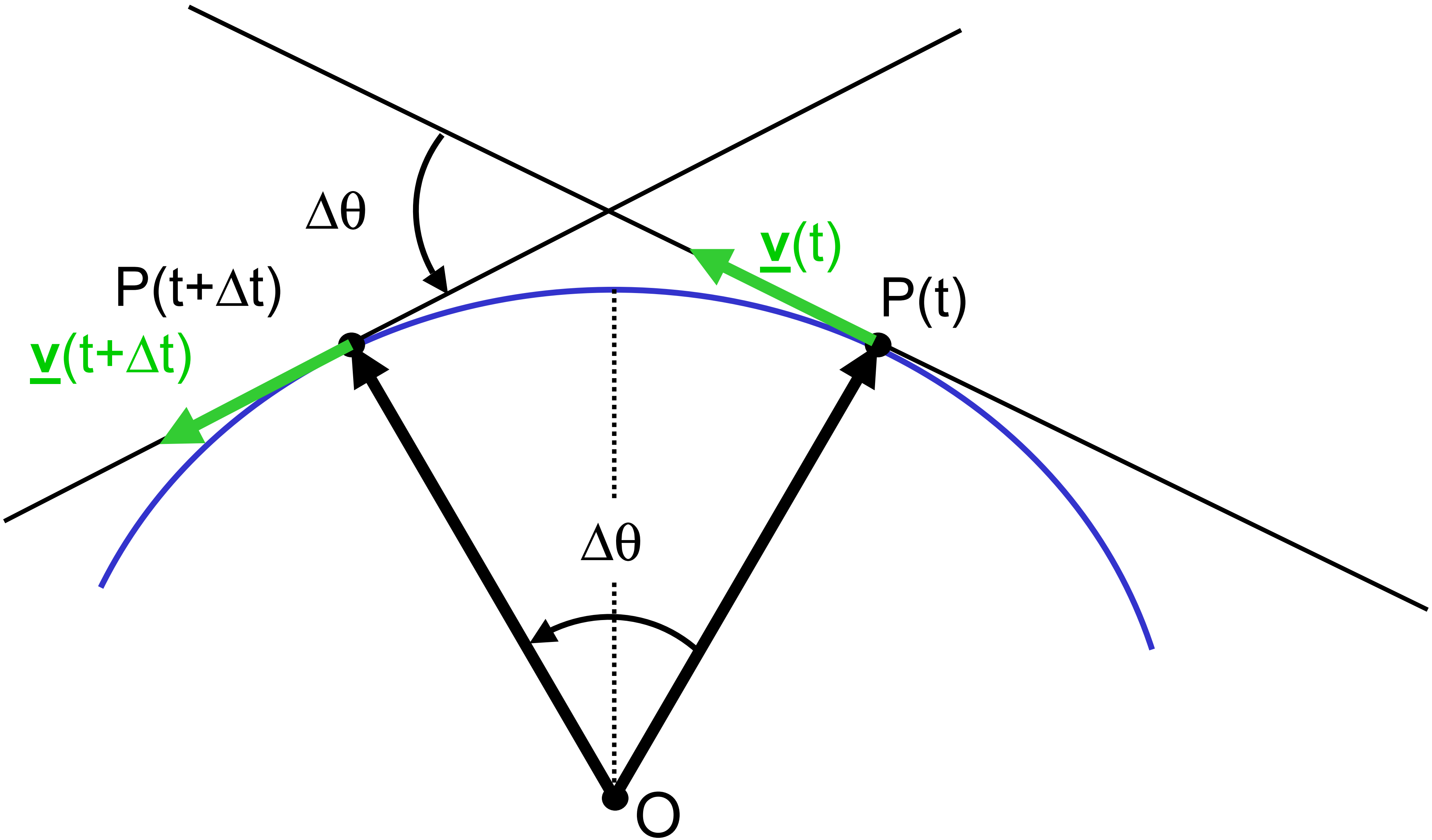


# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (8)

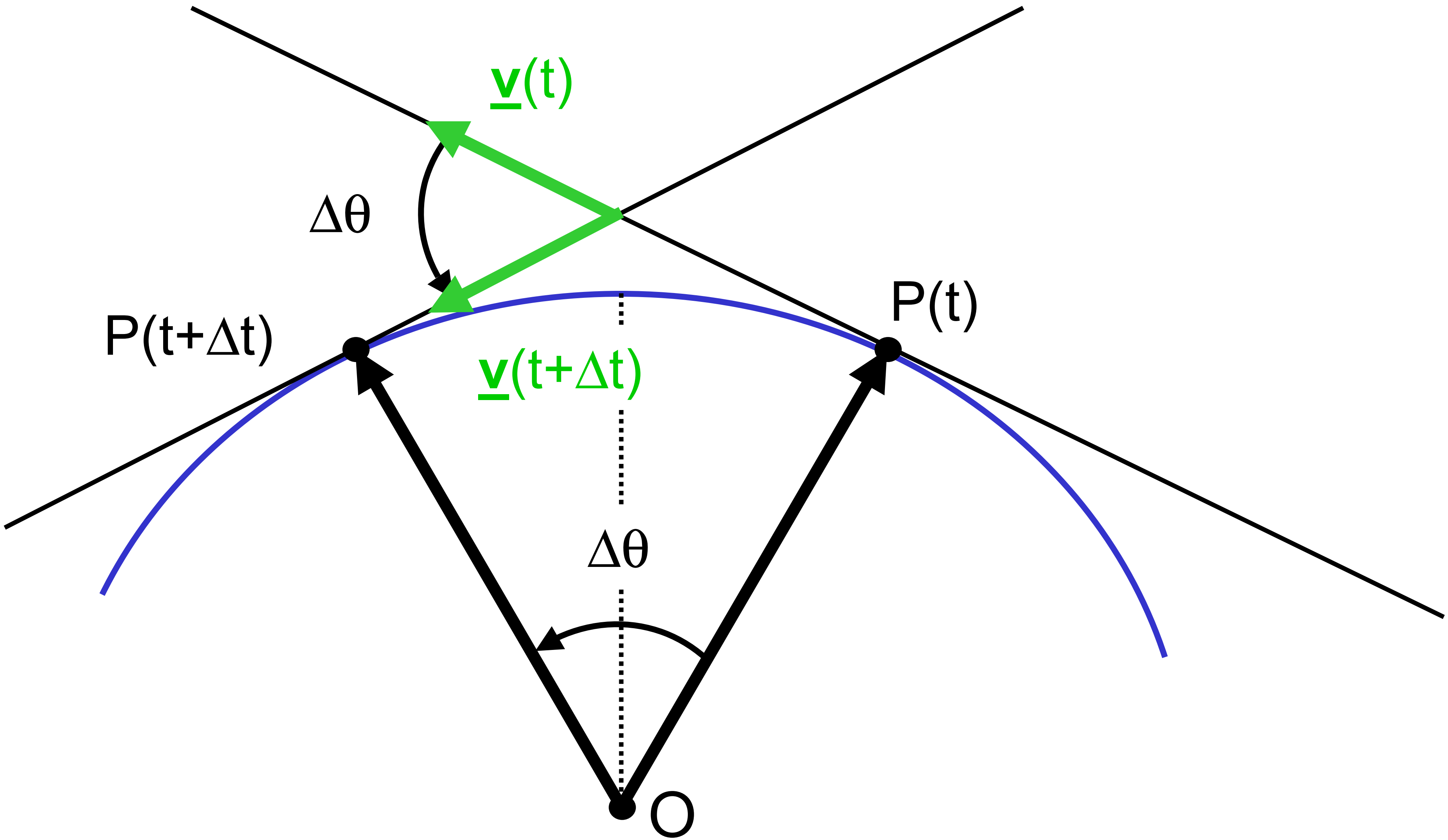
Infine traccio il vettore $\underline{\Delta \mathbf{v}}$



# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (9)



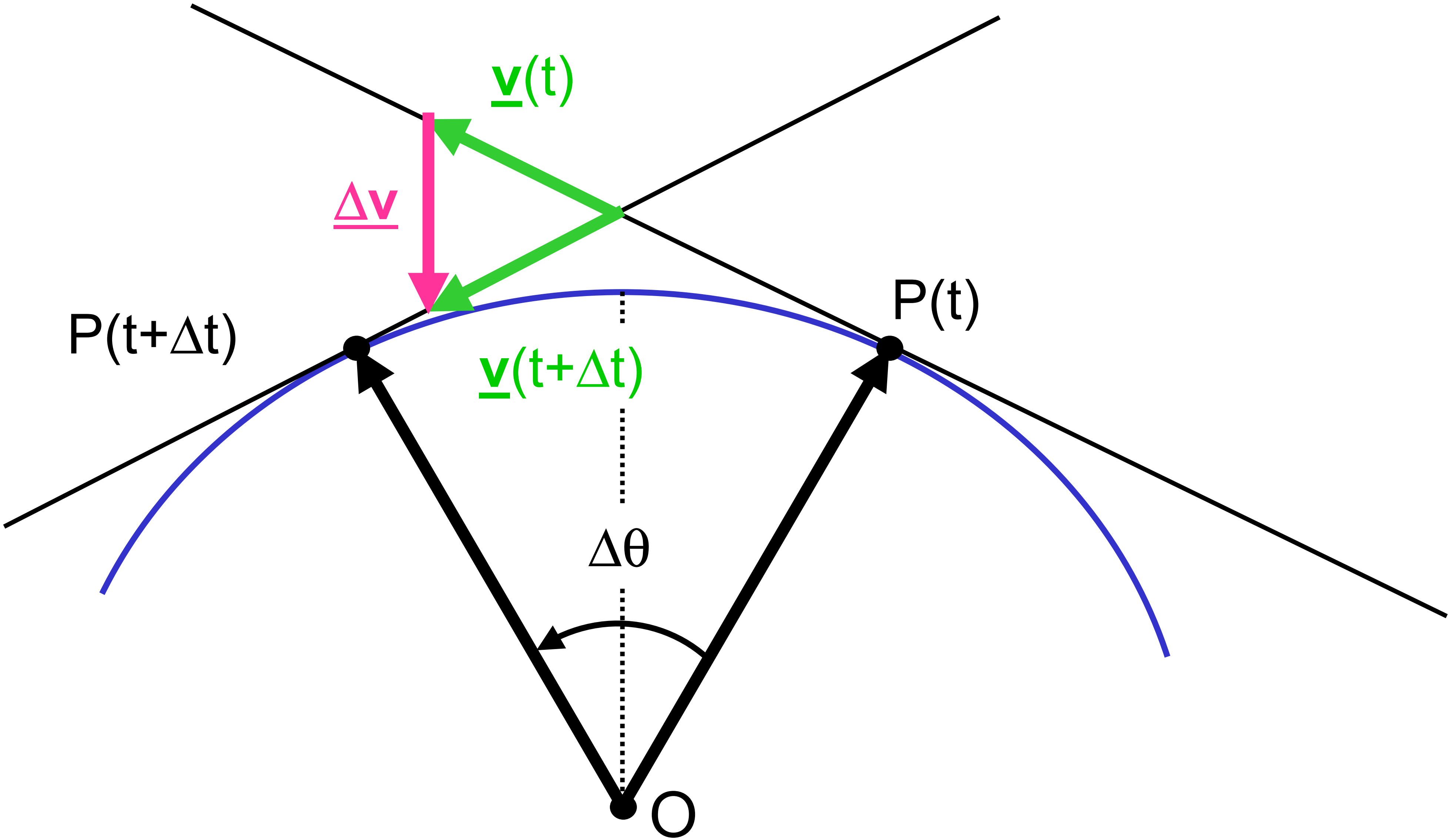
# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (10)



# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (11)

- Le tangenti nei punti P(t) e P(t+$\Delta$t) formano un angolo $\Delta\theta$ perché sono ortogonali a **OP**(t) e a **OP**(t+$\Delta$t) rispettivamente
- Quindi i vettori **v**(t) e **v**(t+$\Delta$t) formano un angolo $\Delta\theta$
- Inoltre, poiché **v**(t) è ortogonale a **OP**(t) e **v**(t+$\Delta$t) è ortogonale a **OP**(t+$\Delta$t), le bisettrici degli angoli (**v**(t), **v**(t+$\Delta$t) ) e (**OP**(t), **OP**(t+$\Delta$t)) sono a loro volta ortogonali

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (12)

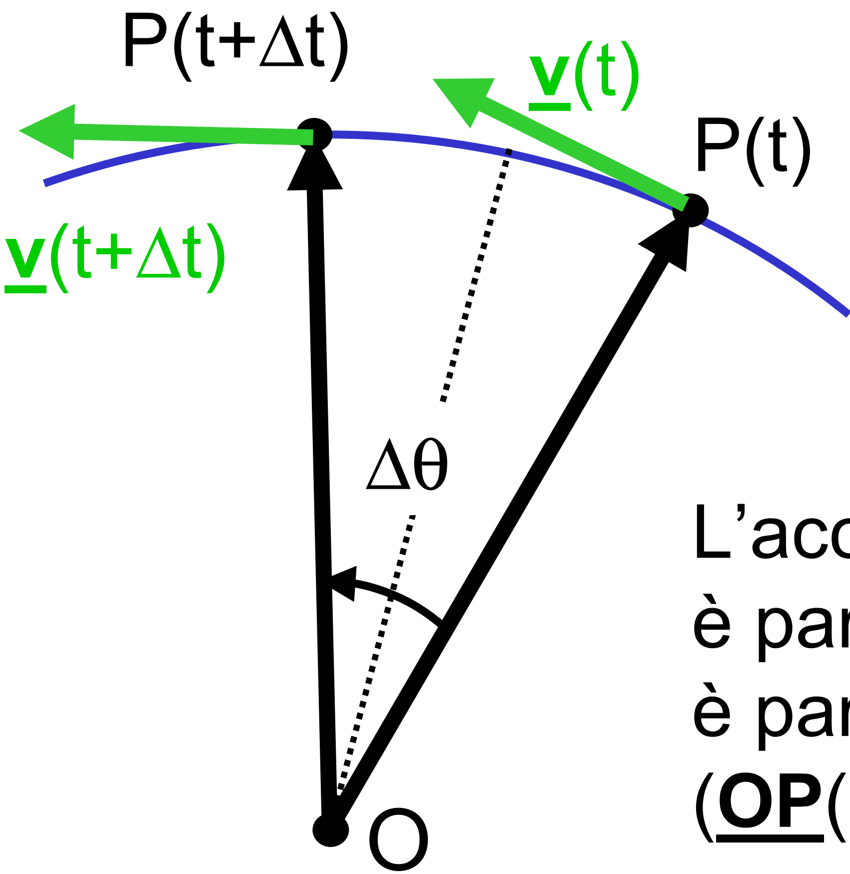


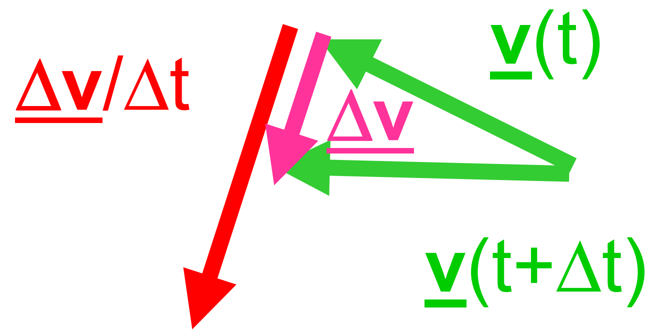
# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (13)

- Poiché i vettori $\underline{\mathbf{v}}$(t) e $\underline{\mathbf{v}}$(t+Δt) hanno lo stesso modulo, il triangolo formato da questi due vettori e $\underline{\Delta\mathbf{v}}$ è un triangolo <u>isoscele</u>
- Quindi $\underline{\Delta\mathbf{v}}$ è ortogonale alla bisettrice dello angolo ($\underline{\mathbf{v}}$(t), $\underline{\mathbf{v}}$(t+Δt))
- Da cui segue che $\underline{\Delta\mathbf{v}}$ è parallelo alla bisettrice dell’angolo ($\underline{\mathbf{OP}}$(t), $\underline{\mathbf{OP}}$(t+Δt))
- Questa proprietà <u>non dipende da</u> Δt e quindi si deve mantenere al tendere di Δt a zero

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (14)

Consideriamo adesso un Δt più piccolo, Δθ è anch'esso più piccolo (Δθ = ω Δt)

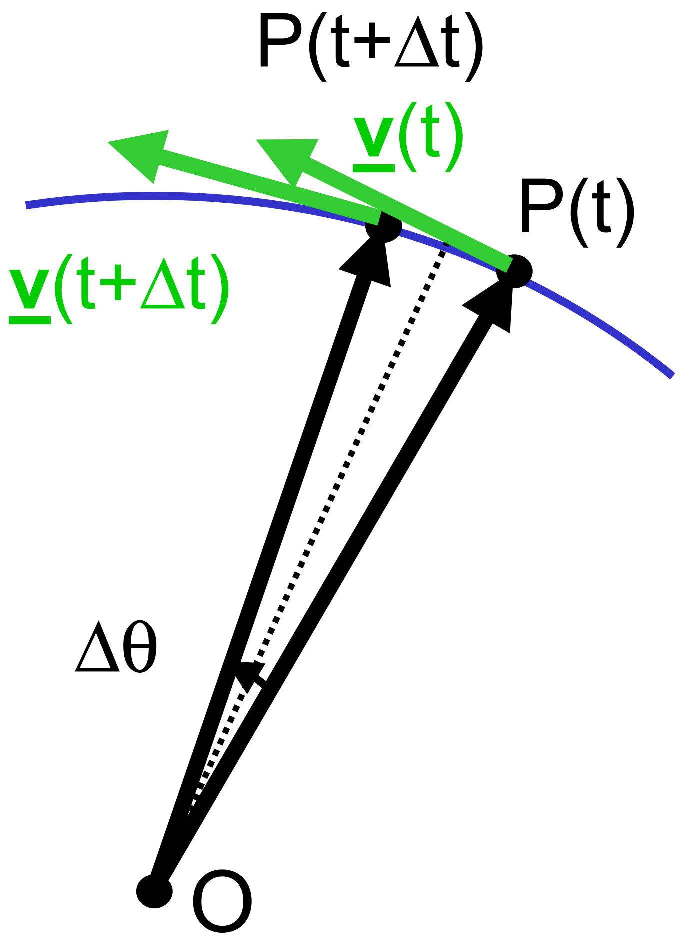


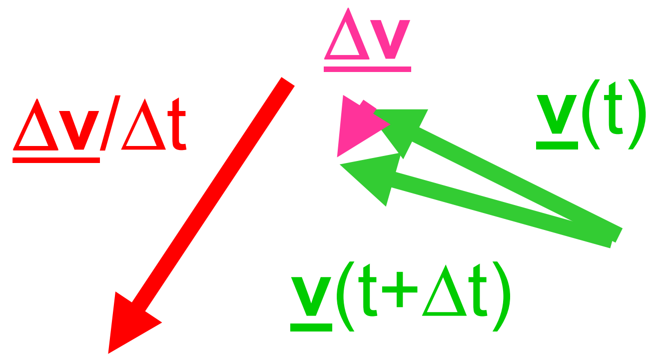




L'accelerazione media **Δv**/Δt
è parallela a **Δv**, quindi anch'essa
è parallela alla bisettrice dell'angolo
(**OP**(t), **OP**(t+Δt))

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (15)

Per $\Delta t$ e $\Delta\theta$ ancora più piccoli
P(t+$\Delta$t) si avvicina a P(t)

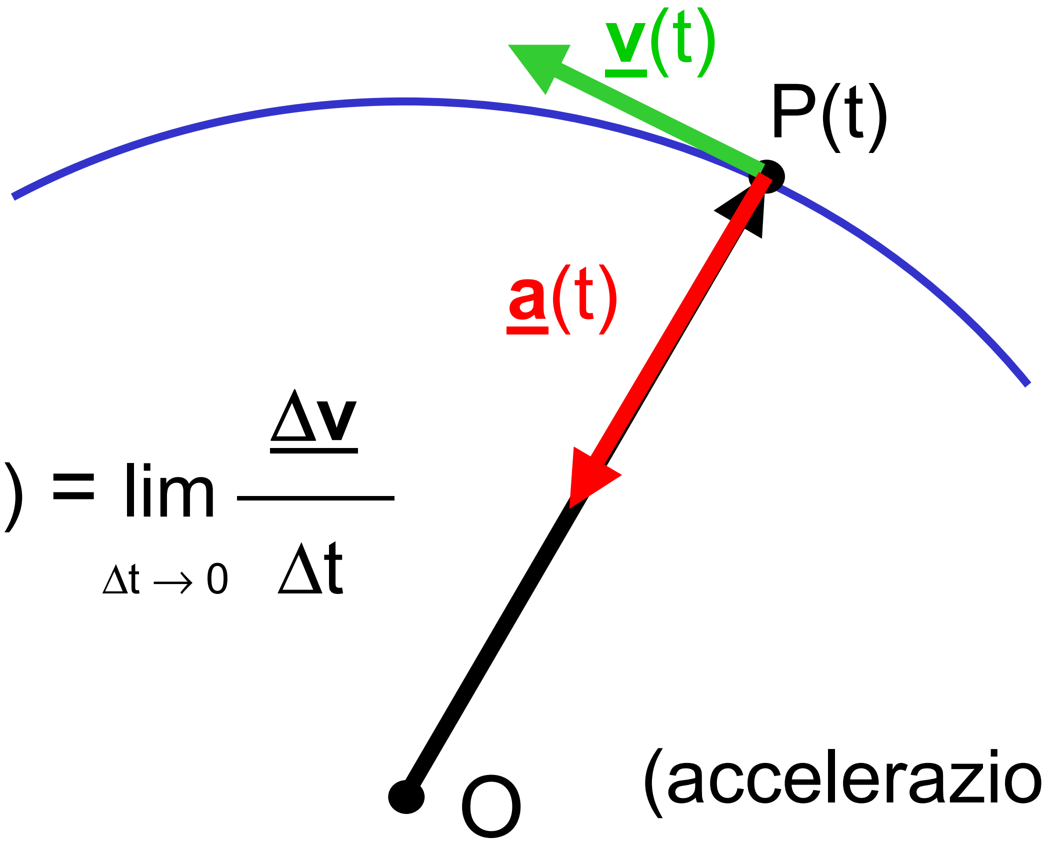



e la bisettrice dell'angolo
(**OP**(t),**OP**(t+$\Delta$t))
si avvicina a **OP**(t)

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (16)

Al tendere di $\Delta t$ a zero anche $\Delta\theta$ tende a zero P($t+\Delta t$) coincide con P($t$) e la bisettrice dell'angolo (**OP**($t$), **OP**($t+\Delta t$)) coincide con **OP**($t$)




$$\underline{\mathbf{a}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{\mathbf{v}}}{\Delta t}$$

La direzione e il verso dell'accelerazione sono quelli del vettore **P**($t$)**O**. Ovvero l'accelerazione è diretta lungo il raggio della circonferenza e verso il centro

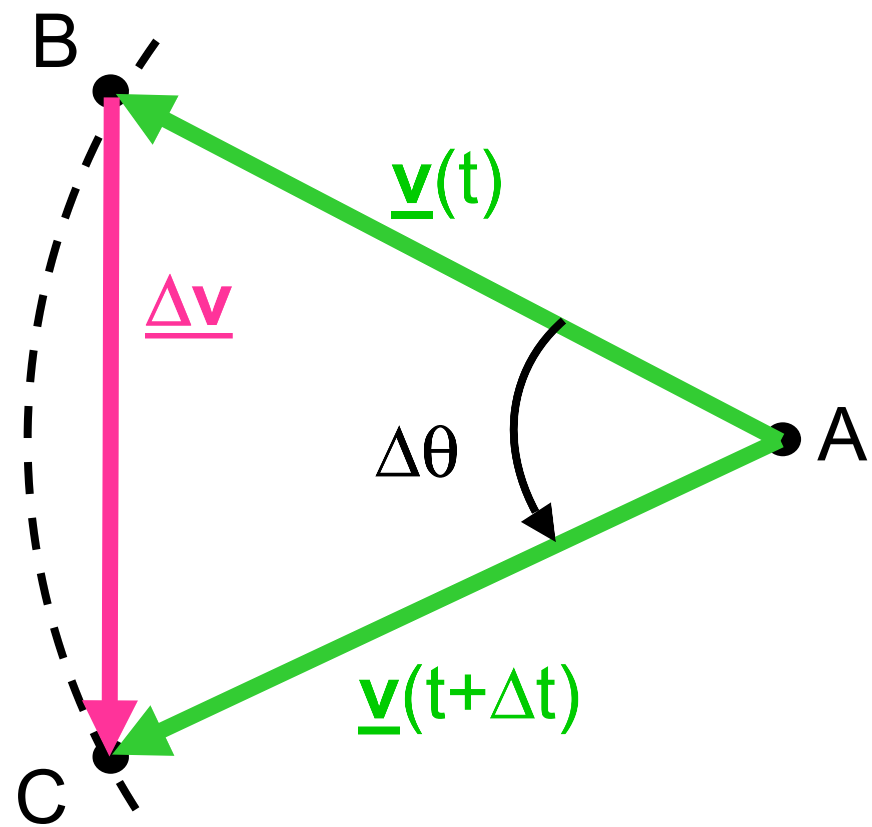
(accelerazione centripeta)

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME (17)

## Modulo dell'accelerazione

arco BC = v $\Delta\theta$, quindi
se $\Delta\theta$ è piccolo,
$\Delta v = v\,\Delta\theta$
ma $\Delta\theta = \omega\,\Delta t$, quindi
$\Delta v = v\,\omega\,\Delta t$
da cui
$a = \Delta v / \Delta t = v\,\omega$
e infine, poiché $v = R\,\omega$,

$$\boxed{a = v^2 / R = \omega^2 R}$$




Notiamo che l'accelerazione è costante in modulo