Precisione e Cifre Significative

Un numero (una misura) è una informazione !

E' necessario conoscere la **precisione** e l'**accuratezza** dell'informazione.

La **precisione** di una misura è contenuta nel **numero di cifre significative** fornite o, se presente, nell'**errore** di misura.

Una **manipolazione numerica** non può nè aumentare nè diminuire la precisione di una informazione !

Il **numero** di cifre significative si calcola contando le cifre, a partire dalla prima cifra non nulla, **da sinistra verso destra**.

esempio:

⇒ 187.3	4 cifre significative
⇒ 10.0000	6 cifre significative
⇒ 10.0101	6 cifre significative
⇒ 1	1 cifra significativa
⇒ 1234.584	7 cifre significative
⇒ 0.00001	1 cifra significativa

Attenzione: non confondere il n. di cifre significative con il n. di cifre decimali!!!

- Una **manipolazione numerica** non può
nè aumentare nè diminuire la precisione
di una informazione !

- **moltiplicando** o **dividendo** due numeri
il risultato non può avere più cifre significative
del fattore **meno** preciso

- **addizioni** e **sottrazioni:**
l'ultima cifra significativa del risultato
occupa la stessa posizione relativa
all'ultima cifra significativa degli addendi

[⇒ nella somma non è importante il numero delle cifre significative ma la posizione di queste]

esempi:

esempio torta

$$850 : 6 = 142\ g$$

altri esempi

$$123.450 * 12.3 = 1.52 * 10^3$$

$$123.450 * 12.30 = 1.518 * 10^3$$

$$187.3 + 1234.584 = 1421.8$$

$$\begin{array}{rl} 187.\underline{3} & + \\ 1234.58\underline{4} & = \\ \hline 1421.884 & \Rightarrow\ 1421.\underline{9} \end{array}$$

Attenzione!

Il valore vero di una misura non è noto a priori.

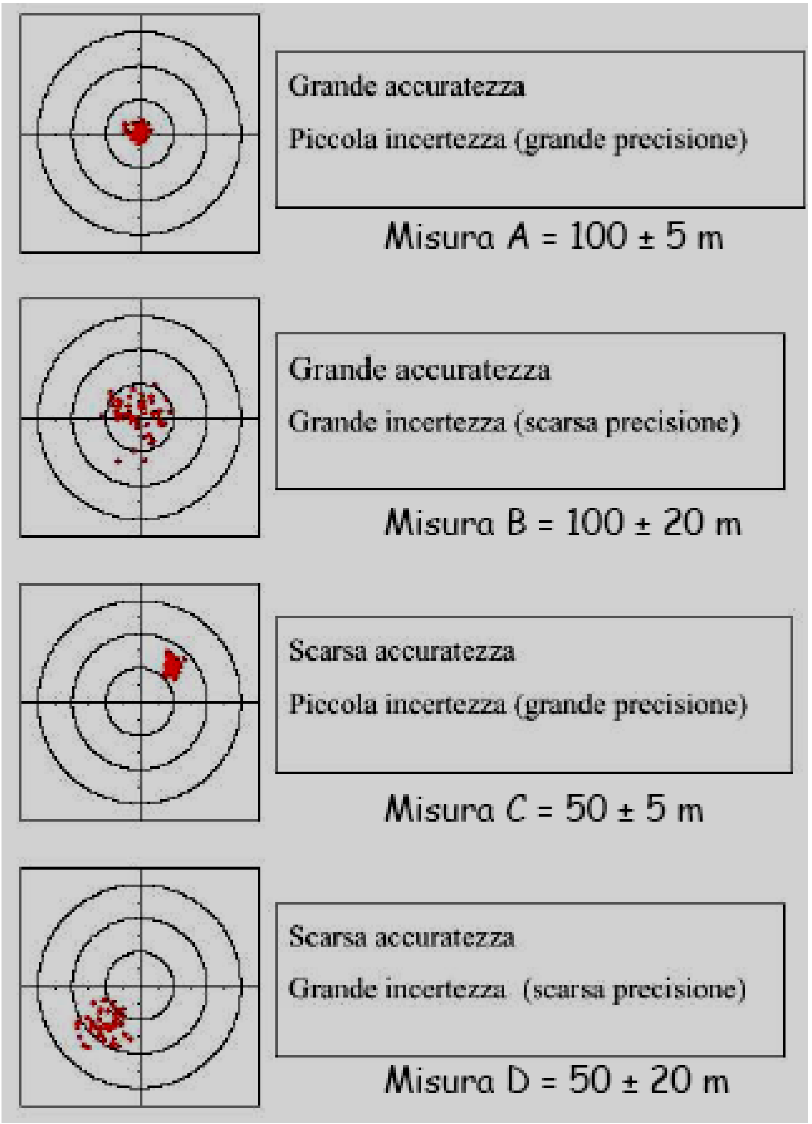
RISOLUZIONE: minima variazione della grandezza da misurare che può essere apprezzata dallo strumento

PRECISIONE esprime quanto il risultato è determinato con esattezza, ed è quindi legato al numero di cifre significative

ACCURATEZZA esprime quanto il risultato sia vicino al *valore vero* presunto

Occorre: analizzare le fonti d'errore ed effettuare medie su un numero congruo di misure…

Es. misura della distanza da un punto di riferimento

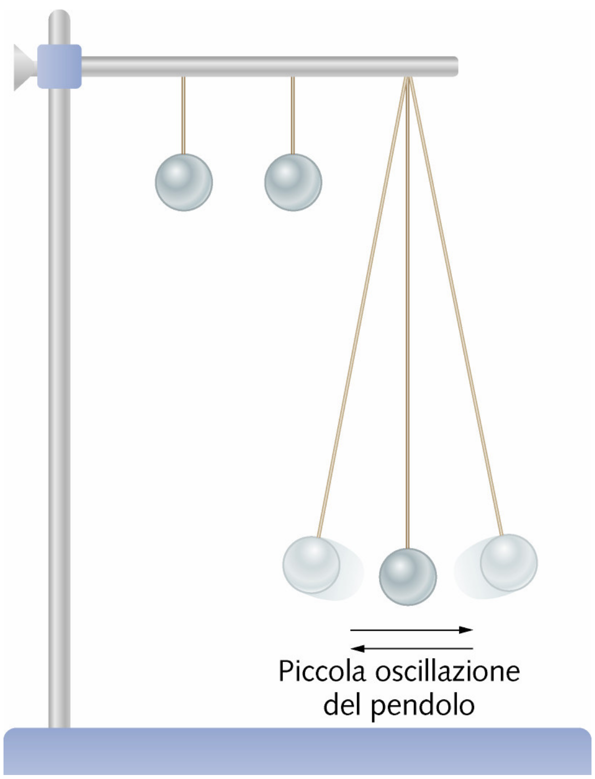


Errori di misura e operazioni di media

La misura di una grandezza fisica è sempre affetta da una certa imprecisione.

La differenza tra il valore misurato di una certa grandezza e il valore reale viene chiamato ERRORE

Esempio: Vogliamo misurare il tempo di oscillazione di un pendolo con un cronometro in grado di apprezzare il centesimo di secondo.



Risultato 1^ misura: 2.30 s

Anche se abbiamo operato con la massima cura, non possiamo affermare che la grandezza da noi misurata abbia realmente questo valore. Tenendo conto della sensibilità del cronometro, possiamo dire che la misura ha un valore compreso tra 2,29s e 2,31 s

E quindi scriveremo (2,30 ± 0,01)

Se eseguiamo la misura 10 volte, potremmo trovare i seguenti risultati:

# prove	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tempo	2,30	2,33	2,28	2,35	2,30	2,32	2,25	2,35	2,32	2,26

A che cosa possiamo addebitare l'errore in questo tipo di misura?

Esistono due tipi di errori:

1 Le incertezze sperimentali che possono essere rivelate ripetendo le misure sono chiamate **errori "casuali".**

- Possibilità di trattamento statistico

2 **Errori sistematici**: non possono essere trattati statisticamente

Alcuni Esempi

Determinazione del tempo di oscillazione del pendolo

- Poss. sorgente di errore **casuale**: tempo di reazione nel far partire il cronometro.

⬇

Uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare il periodo di oscillazione.

- Poss. sorgente di errore **sistematico**: staratura dello strumento (marcia costantemente lento).

⬇

La ripetizione delle misure non evidenzierà questa sorgente di errore.

Misura di una lunghezza con un righello.

- Poss. sorgente di errore **casuale**: interpolazione tra due tacche della scala.

⬇

Uguale probabilità di sovrastimare o sottostimare la lettura.

- Poss. sorgente di errore **sistematico**: deformazione del righello.

✓ **In generale le sorgenti di errori casuale sono:**

- Piccoli errori di giudizio dell'osservatore;
- problemi di risoluzione spaziale;
- piccoli disturbi dell'apparato di misura (p.es. vibrazioni, rumore elettrico, interferenza EM);
- parallasse (per 50% errore di tipo <u>sistematico</u>)
- ecc.

✓ **In generale le sorgenti di errori sistematico sono:**

- Errato o mancato azzeramento degli strumenti;
- Perdita di calibrazione degli strumenti;
- parallasse (per 50% errore di tipo <u>casuale</u>)
- ecc.

Media e deviazione standard

Torniamo all'esempio della misura del tempo di oscillazione del pendolo in cui abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

# prove	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tempo	2,30	2,33	2,28	2,35	2,30	2,32	2,29	2,35	2,32	2,26

Qual è la miglior stima di *x* ?

Si può dimostrare che la miglior stima, $\boldsymbol{x_{best}}$, di $\boldsymbol{x}$ è la media:

$$x_{best} = \frac{2{,}30 + 2{,}33 + 2{,}28 + 2{,}35 + 2{,}30 + 2{,}32 + 2{,}29 + 2{,}35 + 2{,}32 + 2{,}26}{10} = 2.31$$

In generale, per N misure indipendenti della grandezza $\boldsymbol{x}$, la sua miglior stima, $\boldsymbol{x_{best}}$:

$$x_{best} = \mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Scarto o deviazione

Lo **scarto** indica di quanto il valore $\boldsymbol{x_i}$ misurato differisce dalla media.

E' la differenza tra la misura stessa e la media $s = x - \mu$

# prova	Valore misurato x_i	Scarto s_i
1	2,30	-0.01
2	2,33	+0.02
3	2,28	-0.03
4	2,35	+0.04
5	2,30	-0.01
6	2,32	+0.01
7	2,29	-0.02
8	2,35	+0.04
9	2,32	+0.01
10	2,26	-0.05

$$\sum s_i = 0$$

Dato che le misure sono sia superiori sia inferiori alla media
Abbiamo scarti positivi e negativi.
Si dimostra che la somma degli scarti da sempre esattamente 0.

Deviazione standard o Scarto quadratico medio

Poiché la media degli scarti è sempre nulla, essa non è un indicatore significativo. Al contrario, ha un significato statistico importante lo scarto quadratico medio o Deviazione standard.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2 + \ldots\ldots + s_N^2}{N-1}}$$

Il risultato di una grandezza ottenuta da una serie di misure ripetute verrà quindi espresso attraverso la sua media e la sua deviazione standard

$$\boxed{x = \mu \pm \sigma_x}$$

Come si combinano gli errori su 2 misure?

Somma di misure

A volte può capitare di dover sommare tra loro due differenti misure. Ad esempio la larghezza di un armadio e la larghezza di una scrivania per verificare se è possibile accostarli uno di fianco all'altra lungo una parete.

Si dimostra che la migliore stima per l'errore sperimentale sulla somma di due grandezze è **la somma delle deviazioni standard**.

larghezza armadio x_a= 90 cm, dev. standard armadio σ_a= 1 cm

larghezza scrivania x_s= 120 cm, dev. standard scrivania σ_s= 3 cm

Larghezza totale $x = x_a + x_s$ = 90+120 = 210 cm,

Dev. standard totale $\sigma = \sigma_a + \sigma_s$ = 1 + 3 = 4 cm

Prodotto di misure

Volendo calcolare l'area di una stanza è necessario moltiplicare la misura lineare di un lato della stanza per la misura lineare dell'altro lato della stanza. A questo punto come si "propaga" l'errore sulla misura della superficie della stanza?

Per farlo è necessario introdurre un nuovo concetto, quello di **errore relativo**. L'errore relativo è un indicatore che aiuta a capire quanto è precisa una misura. E' evidente che la misura della lunghezza di una strada con una precisione di 3 cm è una misura più precisa della misura della lunghezza di una scrivania con una precisione di 1 cm.
L'errore relativo paragona l'errore compiuto o **errore assoluto** con la misura compiuta. Si definisce

$$\sigma_{rel} = \frac{\sigma_x}{\overline{x}}$$

Si dimostra che la migliore stima per la "propagazione" degli errori nel caso del prodotto di due misure si ottiene **sommando gli errori relativi** delle misure stesse.

Esempio

Supponiamo di voler misurare l'area di una stanza con le seguenti di dimensioni:

Larghezza 3 m ± 4 cm
Profondità 4.5 m ± 3 cm

Calcolo gli errori relativi di ogni misura:

σ_{rel} larghezza = 0.04m / 3m = 0.013
σ_{rel} profondità = 0.03 m / 4.50 m = 0.006

AREA STANZA 13.5 m^2
ERRORE REL. AREA 0.013 + 0.006 = 0.019

Una volta noto l'errore relativo è possibile andare a calcolare l'errore assoluto da associare alla misura invertendo la

relazione $\sigma_{rel} = \dfrac{\sigma_x}{\bar{x}} \Rightarrow \sigma_x = \sigma_{rel} \times \bar{x}$

ERRORE ASSOLUTO STANZA: 0.019×13.5 m^2 = 0.26 m^2

AREA STANZA: 13.5 m^2 ± 0.26 m^2